现代应用数学丛书

广义函数

〔日〕岩村　联著

上海科学技术出版社

現代应用数学丛书

广义函数

〔日〕岩村　联　著

楊永芳　譯

关肇直　校

上海科學技術出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。全书共分五章，第一章介紹广义函数的概念，第二章介紹拓扑結构，第三章叙述卷积和基本解，最后两章为核广义函数及广义函数的富里埃級数和富里埃变换。全书扼要地按照Schwartz的方法介紹了广义函数的基本理論，可供高等学校数学系和物理系师生、研究工作者作参考。

現代应用数学丛书

广 义 函 数

原书名 超 函 数
原著者 〔日〕岩 村 联
原出版者 岩 波 书 店
譯 者 楊 永 芳
校 者 关 肇 直

*

上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷

*

开本 850×1168 1/32 印張 4 30/32 字数 116,000
1961年12月第1版 1961年12月第1次印刷
印数 1—16,500

統一书号：13119·437

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一题目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其内容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，面叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要内容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对内容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书内容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文内过于簡略或不足的地方添加了必要的注释和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

目　录

第1章　广义函数概念

L. Schwartz 在导入广义函数 (distribution) 的概念以后，显著地改进了微分法，这种思想也影响到其他的綫性运算，实际上对分析数学提供了一种有效而富于灵活性的思考方法。本章試由簡例出发导入概念。这些例子是为了适应需要而引进的，并且多少是变了形的东西，希望讀者不要把它看作是概念的本身。

§1　泛函的微分法[一維]

微分运算改进的关鍵在于分部积分。暂且把函数了解为实变数 x 的复值函数，对于連續性与可微性，如不特别申明，都指的是在全区間 $-\infty<x<\infty$ 上的性质。特别，命 φ 一般表示如下的函数：

具有連續的微商 φ'，　　(1.1)

集 $\{x;\ \varphi(x)\neq 0\}$ 有界。　　(1.2)

記号 $\{x;\ \cdots\}$ 表示"满足条件…之 x 的全体"。又，空集也看做是有界的，因此恒等于 0 的函数也是上述 φ 中之一。

如果函数 f 也有連續微商 f'，就得到分部积分

$$\int f'(x)\varphi(x)dx=f(x)\varphi(x)-\int f(x)\varphi'(x)dx,$$

在远处 $f(x)\varphi(x)$ 消失，于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx. \tag{1.3}$$

其次，命 f 是一般的連續函数。即对各个实数 x 确定了与复数 $f(x)$ 的一种对应 $x\Rightarrow f(x)$，現在进而考虑用 L_f 所表示的下列对应：

$$\varphi\Rightarrow L_f(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx. \tag{1.4}$$

与各个 φ 对应的是有限的积分值 $L_f(\varphi)$.

不同的 f 可由 L_f 来加以区别；詳細地説，設 g 是另一連續函数，

$$\left.\begin{array}{ll}\text{若} & f\neq g[\text{即在某点 } c,\ f(c)\neq g(c)],\\ \text{則} & L_f\neq L_g[\text{对于某 } \varphi,\ L_f(\varphi)\neq L_g(\varphi)].\end{array}\right\}\tag{1.5}$$

若 f, g 是实值函数，由于在 c 的某邻域 $|x-c|<\varepsilon$ 中，$f(x)-g(x)$ 的正負不变，因而可取如下的 φ:

$$\varphi(x)>0\quad(|x-c|<\varepsilon),\quad \varphi(x)=0\quad(|x-c|\geqslant\varepsilon).$$

一般則应把 f, g 分为实部与虚部，分别进行比較即可。

因此，如同点与它的坐标能够互相代用一样，f 与 L_f 也可互相代用或等同視之。在这种意义下，$L_f(\varphi)$ 也可写成 $f(\varphi)$，特别当 f' 連續时，(1.3) 又可写成

$$f'(\varphi)=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi'(x)dx.\tag{1.6}$$

对一般的 f，此式右端的积分[有限]也能确定。因之，就一般的 f 来説，能够把对应

$$\varphi\Rightarrow-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi'(x)dx$$

理解为新的‘微系数’f' 的定义。

継續这样思考，我們就可以为圓滿地定义任意連續函数 f 的高阶微系数 $f^{(p)}$ 創造条件；为了防止混乱起見，茲約定，所謂可微与微商都指的是原来微分法中所説的那种意义。

首先，只考虑参与对应 L_f 的 φ 是无限回可微[从而各阶微商都連續]而且滿足条件(1.2)的函数，这样的 φ 的全体記为($\mathfrak{D}$)．对于这样的函数，(1.5) 也成立：在証明中，作为 φ 的实例，考虑实变数 t 的无限回可微函数

$$\kappa_\varepsilon(t)=\begin{cases}\exp(1/(t-\varepsilon^2)) & (t<\varepsilon^2),\\ 0 & (t\geqslant\varepsilon^2),\end{cases}\tag{1.7}$$

将 t 代以 $(x-c)^2$，就得到 $\varphi(x)=\kappa_\epsilon((x-c)^2)$。与前同样，連續函数 f 与对应 L_f 可以互相代用。

函数族$(\mathfrak{D})$关于普通的微分运算“封閉”，即

$$\text{对任意的 } \varphi\in(\mathfrak{D}),\ \varphi'\in(\mathfrak{D}) \tag{1.8}$$

[从而 $\varphi'',\varphi''',\cdots\in(\mathfrak{D})$]。因之，(1.6)又可写成 $f'(\varphi)=-f(\varphi')$。更一般地，如 S 是‘$(\mathfrak{D})$上的泛函’，也就是說，对于各个 $\varphi\in(\mathfrak{D})$，可决定一个复数 $S(\varphi)$ 与之成单一对应 $\varphi\Rightarrow S(\varphi)$，这时，如下的对应 S' 叫做 S 的**微系数**或**微商泛函**：

$$\varphi\Rightarrow S'(\varphi)=-S(\varphi'). \tag{1.9}$$

从(1.8)可知 S' 也是$(\mathfrak{D})$上的泛函，因而这个微分运算可以重复任意回数。逐次微系数 $S^{(0)}=S$, $S^{(1)}=S'$, $S^{(2)}=S''$, $\cdots$，根据(1.9)，依次可写成

$$S^{(p)}(\varphi)=(-1)^pS(\varphi^{(p)})\quad[p=0,1,2,\cdots]. \tag{1.10}$$

注意1.1 微商 f' 虽不連續，但如最初的分部积分存在，那么(1.3)，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\varphi(x)dx=f'(\varphi) \tag{1.11}$$

必然成立。这是与 $f(\varphi)$ 的定义同形的式子。然而，即使 f 可微，分部积分也不必存在，即使有有限的左端，(1.11)也不能保証。这种‘病态的’的实例姑且从略。

例1.1 $f(x)=\max(x,0)$ 的微商是 ‘Heaviside 函数’ $Y(x)$：

$$Y(x)=0\quad(x<0),\qquad Y(x)=1\quad(x>0); \tag{1.12}$$

这个 f 的微商泛函也記为 Y。由上列注意的前半段，即知

$$Y(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}Y(x)\varphi(x)dx=\int_0^{\infty}\varphi(x)dx. \tag{1.13}$$

Y 的微商泛函叫做 Dirac 拟函数 δ。从而

$$\delta(\varphi)=Y'(\varphi)=-\int_0^{\infty}\varphi'(x)dx=\varphi(0).$$

最后的等号可用(1.2)导出。依据(1.10)，

$$\delta^{(p)}(\varphi)=(-1)^p\delta(\varphi^{(p)})=(-1)^p\varphi^{(p)}(0). \tag{1.14}$$

f 的二阶以上的微商 $f^{(p+2)}(x)$ 虽皆相同[在 $x=0$ 不作定义，在 $x\neq0$ 为 0]，但微商泛函 $f^{(p+2)}=\delta^{(p)}$——詳細地說，就是 $L_f^{(p+2)}$——則皆相异。(1.14) 可

以看做是常用的'奇妙'公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(p)}(x)\varphi(x)dx = (-1)^p \varphi^{(p)}(0) \qquad (1.14')$$

在某种程度上的[注意(1.2)之限制]合理化;实际上,$\delta^{(p)}(x)$并沒有什么独立的意义,但(1.14')的左端可解釋为$\delta^{(p)}(\varphi)$的便宜的表达式[与$f(\varphi)$同形]。关于$\delta^{(p)}(\varphi)$,依照后面的一般理論,可以撤消(1.2)的限制。

§2 多变数的情形

关于多变数的連續函数f:

$$f(x) = f(x_1, \cdots, x_n) \quad [-\infty < x_i < \infty],$$

也可考虑前述的对应

$$L_f: \varphi \Rightarrow L_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx; \qquad (2.1)$$

dx是微体积$dx_1 \cdots dx_n$的略号。参与这种对应的φ設为**无限回連續可微**,其意义是,'它和所有的逐次偏微商全都連續,并設$\{x;\ \varphi(x) \neq 0\}$有界,这样的$\varphi$的全体記作$(\mathfrak{D})$,或$(\mathfrak{D})_x$,或$(\mathfrak{D})_X$。如果需要,則用下标表明函数族或泛函族之基础的变数范圍,例如上面的X就是x所在变化的n維Euclid空間R^n。

为了再一次的导出(1.5)的証明,利用(1.7),置

$$\varphi(x) = \kappa_s(|x-c|^2) = \kappa_s(\sum(x_i - c_i)^2)$$

即可;这里$x-c$是向量記法

$$x - c = (x_1 - c_1, \cdots, x_n - c_n),$$

$|x|$是向量$x = (x_1, \cdots, x_n)$的长:

$$|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2, \quad |x| \geqslant 0.$$

今后把R^n也視为实系数向量空間。

与前相同,可把X上['上'指全范圍]的連續函数f与$(\mathfrak{D})$上的泛函L_f等同起来。又对$(\mathfrak{D})$的泛函S,可定义同属于$(\mathfrak{D})$的泛函

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}:\ \varphi \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial x_i}(\varphi) = -S\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \tag{2.2}$$

称之为 S 的(偏)微系数或微商泛函等。这是在連續函数范圍内的微分运算的扩充。就是說：有連續微商 $g=\partial f/\partial x_i$ 时，則有 $L_g=\partial L_f/\partial x_i$，因之，鉴于上面的約定，$g$ 与微商泛函 $\partial f/\partial x_i$"一致"。

这样的扩充关系又可用于其他的函数运算，例如，对于(②)上的泛函 S, T 以及复值常数 a，把(②)上的泛函

$$\varphi \Rightarrow S(\varphi)+T(\varphi), \quad \varphi \Rightarrow a\cdot S(\varphi) \tag{2.3}$$

依次定义为 $S+T$, aS。显見

$$\frac{\partial(S+T)}{\partial x_i}=\frac{\partial S}{\partial x_i}+\frac{\partial T}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial(aS)}{\partial x_i}=a\frac{\partial S}{\partial x_i}. \tag{2.4}$$

注意 2.1 不一定限于(②)上的泛函，一般泛函的和，定数倍积皆可仿此定义。

注意 2.2 固然可以把泛函 $\varphi \Rightarrow S(\varphi)T(\varphi)$ 称为乘积 ST，但它不是函数乘积 $fg: x \Rightarrow f(x)g(x)$ 的扩充。因此只好放弃关于一般乘积 ST 的定义。这也是种种优点中的一个不足之处。

把 $\partial S/\partial x_i$ 再就 x_j 微分之，則有

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_i}(\varphi) = -\frac{\partial S}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = S\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right). \tag{2.5}$$

第三端括弧内，因为是連續的，故能变更微分順序。这种順序变更可推用到第一端，于是

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_i}(\varphi) = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_j}(\varphi), \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_j}. \tag{2.6}$$

这种新的微分运算可以无条件地更换順序。再者，关于'阶数' $|p|=p_1+\cdots+p_n$ 的逐次微分运算 D^p：

$$\left.\begin{array}{l} D^p=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1}\cdots\left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n}, \quad \begin{array}{l} p=(p_1, \cdots, p_n), \\ \text{各 } p_i \text{ 皆是整数 } \geqslant 0 \end{array} \\ \left[(\partial/\partial x_i)^0 \text{ 是恒等运算：} (\partial/\partial x_i)^0 S=S\right] \end{array}\right\} \tag{2.7}$$

仿照(2.6)同样可得

$$D^p S(\varphi) = (-1)^{|p|} S(D^p \varphi). \tag{2.8}$$

为了在处理上更圓滿起見，把泛函的种类加以适当限制。首先注意，函数族$(\mathfrak{D})$对于通常的加法以及复数倍积这两种运算封閉，从而它是复系数的[无限維]向量空間。今后所考虑的函数族，泛函族也多是同样意义的向量空間，恒等于0的函数或泛函乃是其中的'原点'0。

現在，設所考虑的泛函S为向量空間$(\mathfrak{D})$上的'綫性'泛函，其意义是：对任意的$\varphi, \psi \in (\mathfrak{D})$与任意的系数$a$，有

$$S(\varphi+\psi)=S(\varphi)+S(\psi), \tag{2.9}$$

$$S(a\varphi)=aS(\varphi) \quad [\text{从而 } S(0)=0]. \tag{2.9'}$$

这个限制对于以上所有的論証并不发生任何障碍；实际上，L_f本身就是綫性的，而綫性泛函的微系数，和以及复数倍积也都是綫性的。

注意 2.3　把φ, ψ等限制为实值函数$\in (\mathfrak{D})$就够了；記其全体为$(\Re\mathfrak{D})$。这时(2.9′)的系数a当然限于实数，但$S(\varphi)$仍設为复数。把一般的$\varphi \in (\mathfrak{D})$分为实部$\Re\varphi$与虛部$\Im\varphi$：

$$\varphi(x)=\Re\varphi(x)+\sqrt{-1}\,\Im\varphi(x),$$

則$\Re\varphi$以及$\Im\varphi$全都屬于$(\Re\mathfrak{D})$，因而$(\mathfrak{D})$上的S由$(\Re\mathfrak{D})$上的值所决定：

$$S(\varphi)=S(\Re\varphi)+\sqrt{-1}\,S(\Im\varphi).$$

反之，給定$(\Re\mathfrak{D})$上的[实系数]綫性的S时，借助此式把S扩展到$(\mathfrak{D})$上，則新的S在$(\mathfrak{D})$上成为[复系数的]綫性泛函。事实上，从$(\Re\mathfrak{D})$上的(2.9)立即得到$(\mathfrak{D})$上的(2.9)。又$(\mathfrak{D})$上的(2.9′)当a是实数或$\sqrt{-1}$时极其明显，从而就一般的a說来，分成实部与虛部以后也就容易驗証。

在次节虽然还要补充限制，但目前先考察一下綫性定义式(2.9)，(2.9′)所起的一些作用。命α为$X=R^n$上的C^∞級函数，卽无限回連續可微函数。与$\varphi \in (\mathfrak{D})$同样，$\alpha\varphi$也是$C^\infty$級的，又因$\{x;\ \varphi(x)\neq 0\}$包含着$\{x;\ \alpha(x)\varphi(x)\neq 0\}$，所以后者也是有界集。从而$\alpha\varphi \in (\mathfrak{D})$。如使$S(\alpha\varphi)$对应于$\varphi$，新的綫性泛函就确定了；并以$\alpha S$表示之。

$$\alpha S:\ \varphi \Rightarrow \alpha S(\varphi) = S(\alpha\varphi). \tag{2.10}$$

这个定义作如下的解释比較适当：因为 $\alpha L_f = L_{\alpha f}$，所以乘积 αS 是乘积 αf 的'扩充'，特別当 $\alpha = a = \text{const}$ 时，αS 与 (2.3) 的 aS 一致[(2.9′)]。

为了避免与此乘积混淆起見，引入在綫性泛函时常使用的記号 $\langle S, \varphi\rangle$：

$$\langle S, \varphi\rangle = S(\varphi). \tag{2.11}$$

現在試把以上各公式用這一記法改写一下。

若把 $\partial/\partial x_i$ 用右肩的 $'$ 表示，則 α' 也是 C^∞ 級的，再把 $(\alpha\varphi)' = \alpha'\varphi + \alpha\varphi'$ 代入(2.9)，卽得

$$\langle S, (\alpha\varphi)'\rangle = \langle S, \alpha'\varphi\rangle + \langle S, \alpha\varphi'\rangle.$$

按照定义把各項依次变形，最后移項卽得

$$-\langle S', \alpha\varphi\rangle = \langle \alpha' S, \varphi\rangle + \langle \alpha S, \varphi'\rangle,$$
$$-\langle \alpha S', \varphi\rangle = \langle \alpha' S, \varphi\rangle - \langle (\alpha S)', \varphi\rangle,$$
$$\langle (\alpha S)', \varphi\rangle = \langle \alpha' S, \varphi\rangle + \langle \alpha S', \varphi\rangle.$$

最終，按照泛函和的定义，得到

$$(\alpha S)' = \alpha' S + \alpha S' \quad [' \text{ 是 } \partial/\partial x_i]. \tag{2.12}$$

反复利用 (2.12)，就得到下面的 Leibniz 公式：如同(2.7)那样，考虑以整数 $q_i \geq 0$ 为分量的向量 $q = (q_1, \cdots, q_n)$，将 $D^p S$ 写作 $S^{(p)}$，則有

$$(\alpha S)^{(p)} = \sum_{q \leq p} C_q{}^p \alpha^{(p-q)} S^{(q)}. \tag{2.13}$$

右端是由 q 变化所产生的和，而且

$$\left.\begin{aligned} &q \leq p，\text{卽对于所有分量有条件 } q_i \leq p_i, \\ &C_q{}^p = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i!}{q_i!\,(p_i - q_i)!}\ [\text{多項式系数}]. \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

如下所説，能够局部地，就是以 X 中的开集 Ω 代替 X，来定义与前見各种概念相当的概念。命 f 为 Ω 上的連續函数。当

$x\in\Omega$ 趋近于 Ω 的边界时，也可能 $|f(x)|\to\infty$。尽管如此，为使有限积分

$$L_f(\varphi)=\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \tag{2.15}$$

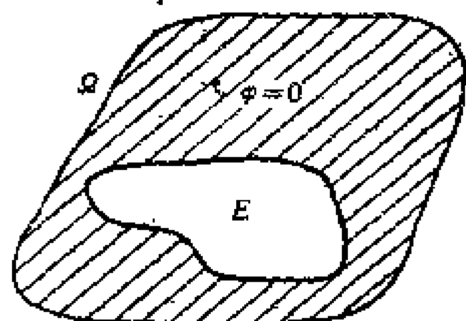


图　2.1

确定，只要集

$$E=\{x;\ \varphi(x)\neq 0\}$$

的闭包 $\bar{E}$ 含于 Ω 内就行；$\bar{E}$ 是用 E 的点可能任意逼近的点[E 本身的点也包含在内]的全体，从而这是包含 E 的最小閉集。对于任意連續函数 φ，上述 E 的閉包叫做 φ 的**支集**(carrier, support)，記作 $\mathrm{Car}(\varphi)$。

例如对于 $\varphi=\kappa_\varepsilon$[(1.7)]，$E$ 是半无限开区間 $t<\varepsilon^2$，$\mathrm{Car}(\varphi)$ 是区間 $t\leq\varepsilon^2$。

于是，設使 $\mathrm{Car}(\varphi)$ 含于 Ω 内的函数 $\varphi\in(\mathfrak{D})$ 的全体为 $(\mathfrak{D})_\Omega$：

$$(\mathfrak{D})_\Omega=\{\varphi;\ \varphi\in(\mathfrak{D}),\ \mathrm{Car}(\varphi)\subset\Omega\},$$

以此代替 $(\mathfrak{D})$。$\Omega=X$ 时，函数族 $(\mathfrak{D})_\Omega$ 不外就是$(\mathfrak{D})$。这还能表达如下。首先，对于在 X 内的有界閉集 K，置

$$(\mathfrak{D}_K)=\{\varphi;\ \varphi \text{ 是在 } X \text{ 上 } C^\infty \text{ 級},\ \mathrm{Car}(\varphi)\subset K\}. \tag{2.16}$$

对于在 Ω 内所有 K 的$(\mathfrak{D}_K)$的并集正是$(\mathfrak{D})_\Omega$：

$$(\mathfrak{D})_\Omega=\bigcup_{K\subset\Omega}(\mathfrak{D}_K). \tag{2.17}$$

$(\mathfrak{D}_K)$ 和 $(\mathfrak{D})_\Omega$ 都是复系数的向量空間，而且关于微分运算封閉。这是因为，$\mathrm{Car}(a\varphi+b\psi)$ 含于 $\mathrm{Car}(\varphi)$ 及 $\mathrm{Car}(\psi)$ 的并集 $\mathrm{Car}(\varphi)\cup\mathrm{Car}(\psi)$ 之内，而且 $\mathrm{Car}(D^p\varphi)\subset\mathrm{Car}(\varphi)$。

与前同样，可把 Ω 上的連續函数 f 与 $(\mathfrak{D})_\Omega$ 上的綫性泛函 L_f[(2.15)]等同看待。又对 $(\mathfrak{D})_\Omega$ 上的綫性泛函，可以定义同前的各种运算。至于乘积 αS 的問題，可参看 §3 末尾。

§3 广义函数

为了能灵活运用分析数学的基本方法'轉向极限'，还需要在泛函的假設条件中补充按照适当收斂 $\varphi_j \to \varphi$ 的連續性 $S(\varphi_j) \to S(\varphi)$. 首先要抉擇适当的收斂。譬如仅仅假設 $\varphi_j \in (\mathfrak{D})$ 在各点 x 单純地收斂于 $\varphi \in (\mathfrak{D})[\varphi_j(x) \to \varphi(x)]$ 的話，就連 $f(\varphi_j) \to f(\varphi)$ 也不能保証。另外虽取較强的一致收斂 $\|\varphi_j - \varphi\|_\infty \to 0$，結果也是同样[如下列的反例]。这里的記号 $\|g\|_\infty$ 表示遍历一切 x 的 $|g(x)|$ 的上确界：

$$\|g\|_\infty = \sup_x |g(x)|. \tag{3.1}$$

例 3.1 取原点以外的点 $a \in X$，置

$$\psi_a(x) = \kappa_\varepsilon(|x-a|^2)/|a| \quad [\text{参照}(1.7)，\varepsilon \text{ 固定}],$$

則 $\psi_a \in (\mathfrak{D})$，且当 $|a| \to \infty$ 时一致地 $\psi_a \to 0$. 然而，对于 $f(x) = |x|^2$ 却有 $f(\psi_a) \to \infty \ (|a| \to \infty)$.

在这个例子中，各 ψ_a 属于某 $(\mathfrak{D}_K)$ [K 是有界閉集]，但不等于說一切 ψ_a 属于某同一的 $(\mathfrak{D}_K)$. 特别要注意'各个'与'一切'的区别。若一切 φ, φ_j 都属于某同一 $(\mathfrak{D}_K)$ 的話，根据

$$|f(\varphi_j) - f(\varphi)| = \left|\int_K f(x)(\varphi_j(x) - \varphi(x))\,dx\right| \leqslant a \cdot \|\varphi_j - \varphi\|_\infty,$$

$$a = \int_K |f(x)|\,dx = \text{const} < \infty,$$

从一致收斂 $\varphi_j \to \varphi$ 可得 $f(\varphi_j) \to f(\varphi)$. 这就是說，

$$\text{在各} (\mathfrak{D}_K) \text{上，泛函} f = L_f \text{对于一致收斂連續。} \tag{3.2}$$

然而这个連續性未必能傳递給微商泛函 $D^p f$：参看例 1.1。为了弥补这个缺点，定义比一致收斂更强的，在 $(\mathfrak{D}_K)$ 上的固有收斂 $\varphi_j \to \varphi$：那就是各阶微商[連 0 阶的也在內]的一致收斂，这样等于假設了

$$\text{对于各} D^p，\|D^p\varphi_j - D^p\varphi\|_\infty \to 0. \tag{3.3}$$

$\varphi_j \in (\mathfrak{D}_K)$ 在这种意义下收斂于 $\varphi \in (\mathfrak{D}_K)$ 的事实，可写作 φ_j

$\to\varphi$ in$(\mathfrak{D}_K)$.

注意 3.1 如果更强地，要求收斂(3.3)对于一切p都是一致的，也就是說，对于所有p的上确界

$$\varepsilon_j=\sup_p\|D^p\varphi_j-D^p\varphi\|_\infty=\sup_{p,x}|D^p\varphi_j(x)-D^p\varphi(x)|$$

都$\to 0$，这样作将是不现实的。因为如$\varepsilon_j<\infty$的話，就能有$\varphi_j=\varphi$。例如就一維空間$[X=R^1]$来說，$\psi=\varphi_j-\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$对于$K$以外的点$a$，$\psi$与它的逐次微系数同时为0，因而$|\psi(x)|\leqslant\varepsilon_j|x-a|^p/p!\to 0\ (p\to\infty)$，于是$\psi(x)=0$。

当$\varphi_j\to\varphi$ in$(\mathfrak{D}_K)$时，自然还有

(i) 一致地$\varphi_j\to\varphi$　[作为$p=(0,\cdots,0)$的情形]，

(ii) $\varphi'_j\to\varphi'$ in$(\mathfrak{D}_K)$　[$'$表示$\partial/\partial x_i$]。

从而在$(\mathfrak{D}_K)$上，关于固有收斂还有这样的性质：

(i) 泛函$f=L_f$連續，

又据对应$\varphi\Rightarrow\varphi'$的連續性(ii)便有

(ii) 泛函S連續时，S'也連續：

詳細地說，通过規定S'的图式(schema)

$$\varphi\Rightarrow\varphi'\Rightarrow S(\varphi')\Rightarrow -S(\varphi')=S'(\varphi),$$

[注意各阶段的連續性！]由$\varphi_j\to\varphi$ in$(\mathfrak{D}_K)$可导致$S'(\varphi_j)\to S'(\varphi)$❶。

$(\mathfrak{D})$上的綫性泛函，如果在任何$(\mathfrak{D}_K)$上[并且按照那上面的固有收斂]也連續的話，就叫做**广义函数**[詳細地說，$X=R^n$上的广义函数]；要注意这里应考虑X上的一切有界閉集K。X上的連續函数[看作$f=L_f$]也是广义函数，广义函数的微系数，复数倍积以及和都仍是广义函数；复数倍积的連續性可以按照图式$\varphi\Rightarrow S(\varphi)\Rightarrow a\cdot S(\varphi)$而归結到式中各阶段的連續性，关于和的連續性也是一样的。X上的C^∞級函数α与广义函数S的乘积αS[参看(2.10)]仍是广义函数。

---

❶ 此处原书誤为$S(\varphi)$。——校者注

验証时，只要闡明图式 $\varphi \Rightarrow \alpha\varphi \Rightarrow S(\alpha\varphi)=\alpha S(\varphi)$ 第一段 $\varphi \Rightarrow \alpha\varphi$ 的連續性即可。設 $\varphi_j \to \varphi$ in $(\mathfrak{D}_K)$. 这时 $\alpha\varphi_j \in (\mathfrak{D}_K)$, $\alpha\varphi \in (\mathfrak{D}_K)$; 又从

$$\|\alpha\varphi_j - \alpha\varphi\|_\infty \leqslant (\max_{x\in K}|\alpha(x)|)\cdot\|\varphi_j - \varphi\|_\infty \to 0$$

可知，一致地 $\alpha\varphi_j \to \alpha$. 同理，

$$D^p(\alpha\varphi_j) = \sum_{q\leqslant p} C_q{}^p \alpha^{(p-q)}\varphi_j^{(q)} \quad [参看(2.13)]$$

的右端各項一致收斂于 $D^p(\alpha\varphi)$ 的相应項，从而一致地 $D^p(\alpha\varphi_j)\to D^p(\alpha\varphi)$. 故 $\alpha\varphi_j \to \alpha\varphi$ in $(\mathfrak{D}_K)$.

例 3.2 由 X 的定点 a 所确定的泛函

$$\delta_a:\ \delta_a(\varphi)=\varphi(a) \quad [\varphi\in(\mathfrak{D})],$$

$$\delta_a^{(p)}=D^p\delta_a:\ \delta_a^{(p)}(\varphi)=(-1)^{|p|}\varphi^{(p)}(a)$$

是广义函数，按照 §6 所述的一般理論，δ_a 可以了解为'置于点 a 的单位质量'。特别 $\delta=\delta_0$ 时称为 Dirac 拟函数。已給若干个点 a，假設这些点对于 X 是'局部'有限的，就是說，对 X 的各点 x，存在着邻域 $U(x)$，每个 $U(x)$ 仅含有限个 a. 这时，对各点 a，若使系数 $c=c_a$ 及微分运算 D^p, $p=p_a$ 与之对应，则由

$$S(\varphi)=\sum_a(-1)^{|p|}c\cdot\varphi^{(p)}(a)$$

可决定一个广义函数 S: 事实上，当 $\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$ 时，K 被有限个 $U(x)$ 所复盖，于是，$\sum_a$ 成为有限和 $\sum_{a\in K}$ 了。这个 S 在形式上可写成

$$S=\sum_a c\cdot D^p\delta_a=\sum_a c\cdot\delta_a^{(p)};$$

关于广义函数的无限和等的收斂問題可参看 §11, §12。

例 3.3 設 f 是 $X=R^1$ 上的分区連續函数，即 f 的不連續点 a 是局部有限个，而且具有左右[有限]極限值 $f(a-0)$, $f(a+0)$. 把在共同連續点上成立着 $f(x)=g(x)$ 的分区連續函数看做相等的，并記作 $f=g$. 这时也可把 f 与广义函数

$$L_f:\ L_f(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)\,dx$$

等同起来。若存在分区連續微商 f' 时，根据分部积分，有

$$-L_f(\varphi')=\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\varphi(x)\,dx+\sum_a(f(a+0)-f(a-0))\varphi(a).$$

把广义微商 $(L_f)'$ 写成 f'，把微商——与其相应的广义函数——改写为 $[f']$. 这样，上式就成为

$$f' = [f'] + \sum_a f_a \cdot \delta_a, \quad \text{但} \ f_a = f(a+0) - f(a-0).$$

若$[f']$的微商$[f'']$也是分区連續的話，就有

$$f'' = [f''] + \sum_b [f']_b \cdot \delta_b + \sum_a f_a \cdot \delta'_a.$$

这里，$\sum_b$是关于所有不連續点 b 的和。

对于广义函数 S，凡可进入 $S(\ \ )$ 的括弧之内的，原来規定的是属于$(\mathfrak{D})$的元素 [$S=L_f$ 的情况除外]。例如，'于 X 的原点的 δ 值'等并无意义。然而为了便利起見，把 S 也記作 $S(x)$。这个 x 如同定积分 $\int_X f(x)dx$ 中的 x，它的值并不是固定的，可以用其他的变数 y, z 等——在 X 上自由变动的——代替。因此，例如定义为 $f(x)=|x|$ 的函数 f 既簡称为'函数$|x|$'，同时又能把 L_f 叫做'广义函数$|f|$'。而且記号 $S(x)$ 对变数更换也很便利。举例如下：

若把連續函数 f 的反轉

$$\sigma f:\ \sigma f(x) = f(-x) \quad [\text{也写作}\ \check{f}] \tag{3.4}$$

理解为广义函数，对于 $\varphi \in (\mathfrak{D})$——积分域 X 从略——則有

$$\sigma f(\varphi) = \int f(-x)\varphi(x)dx = \int f(x)\varphi(-x)dx = f(\sigma\varphi).$$

注意3.2　与 φ 同时 $\sigma\varphi \in (\mathfrak{D})$．詳細說，$\varphi \in (\mathfrak{D}_K)$ 时 $\sigma\varphi \in (\mathfrak{D}_{-K})$，但因

$$-K = \{x;\ -x \in K\} \quad [\text{这也是有界閉集}],$$

于是对应 $(\mathfrak{D}_K) \ni \varphi \to \sigma\varphi \in (\mathfrak{D}_{-K})$ 連續，即当 $\varphi_j \to \varphi$ in $(\mathfrak{D}_K)$ 时，$\sigma\varphi_j \to \sigma\varphi$ in $(\mathfrak{D}_{-K})$。

仿照 $\sigma f(\varphi) = f(\sigma\varphi)$，把广义函数的反轉定义为

$$\sigma S:\quad \sigma S(\varphi) = S(\sigma\varphi) \quad [\varphi \in (\mathfrak{D})], \tag{3.5}$$

并記为 $\check{S}$。显見 σS 是$(\mathfrak{D})$ 上的綫性泛函，鉴于上面的注意，它在各$(\mathfrak{D}_K)$上連續，从而 σS 也是广义函数。上面的注意，仅是为了驗証定义的妥善性而提出的，今后常从略。

如同把 S 写作 $S(x)$ 那样，也把 σS 写作 $S(-x)$。又如对于 $\varphi \in (\mathfrak{D})$ 的值 $S(\varphi)$，象(2.11)那样写作 $\langle S, \varphi \rangle$，此外，还用

$$\langle S(x),\ \varphi(x)\rangle_x,\quad \int_X S(x)\varphi(x)dx,\quad \int_X S\varphi\, dx$$

等表示之，并常省掉$\langle\ \ \rangle_x$的x或是'积分域' X. 按照这样的約定，就有

$$\int S(-x)\varphi(x)dx=\int S(x)\varphi(-x)dx.$$

若把連續函数f的平移

$$\tau_a f:\ \tau_a f(x)=f(x-a)$$

看作是广义函数，則有

$$\tau_a f(\varphi)=\int f(x-a)\varphi(x)dx=\int f(x)\varphi(x+a)dx=f(\tau_{-a}\varphi).$$

仿此，把广义函数的平移定义为

$$\tau_a S:\ \tau_a S(\varphi)=S(\tau_{-a}\varphi). \tag{3.6}$$

对于$\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$連續地对应着$\tau_{-a}\varphi\in(\mathfrak{D}_{K-a})$. 但此中的$K-a$是把$K$平行移动了$-a$的集:

$$K-a=\{x-a;\ x\in K\}=\{x;\ x+a\in K\}.$$

$\tau_a S$也是广义函数，可記作$S(x-a)$. 于是

$$\int S(x-a)\varphi(x)dx=\int S(x)\varphi(x+a)dx.$$

又可把$\tau_{-a}S$記作$S(x+a)$. 于是，有

$$\tau_a D^p S=D^p\tau_a S,\quad \tau_a\tau_b S=\tau_{a+b}S=\tau_b\tau_a S. \tag{3.7}$$

例 3.4 关于例3.2的δ_a与$\delta=\delta_0$，有关系式

$$\tau_a\delta=\delta_a,\quad 一般有\ \delta_a^{(p)}=\tau_a\delta^{(p)},$$

于是

$$\int \delta^{(p)}(x-a)\varphi(x)dx=(-1)^{|p|}\varphi^{(p)}(a).$$

实部，虚部 把連續函数f的实部$\Re f$作为广义函数考虑时，由于φ一般不限定为实值函数，所以$\Re f(\varphi)$与$f(\varphi)$的实部$\Re[f(\varphi)]$并不一致，于是，对于广义函数S的实部，虚部有予以間接定义的必要。

首先，对于实值的 $\varphi\in(\mathfrak{D})$，令

$$U(\varphi)=\Re[S(\varphi)],\quad V(\varphi)=\Im[S(\varphi)],$$

把泛函 U,V 綫性地扩展于 $(\mathfrak{D})$ 的全域：

$$\left.\begin{aligned}U(\varphi)&=U(\Re\varphi)+\sqrt{-1}\,U(\Im\varphi),\\ V(\varphi)&=V(\Re\varphi)+\sqrt{-1}\,V(\Im\varphi).\end{aligned}\right\}\text{[参看注意 2.3]}$$

这样一来，U,V 在各个 $(\mathfrak{D}_K)$ 上显而易見是連續的：根据是 $\varphi\Rightarrow\Re\varphi$，$\varphi\Rightarrow\Im\varphi$ 的連續性！U,V 分别叫做 S 的实部 $\Re S$ 与虚部 $\Im S$。这就是連續函数的实部，虚部概念的扩充：

$$\Re L_f=L_{\Re f},\quad \Im L_f=L_{\Im f}.$$

又对实値的 $\varphi\in(\mathfrak{D})$，$W=U+\sqrt{-1}\,V$ 与 S 一致，因而在 $(\mathfrak{D})$ 全域上也互相一致：

$$\begin{aligned}W(\varphi)&=W(\Re\varphi)+\sqrt{-1}\,W(\Im\varphi)\\&=S(\Re\varphi)+\sqrt{-1}\,S(\Im\varphi)=S(\varphi).\end{aligned}$$

概念的局部化 取 X 的开集 Ω，如同 §2 末尾那样来处理 $(\mathfrak{D})_\Omega$ 上的綫性泛函时，也能照样定义 'Ω 上的广义函数'。詳細地說，它們是 $(\mathfrak{D})_\Omega$ 上的綫性泛函而且在各 $(\mathfrak{D}_K)$ [但其 $K\subset\Omega$] 上連續。以下也把 $S(\varphi)$ 記为 $\int_\Omega S\varphi\,dx$ 等。Ω 上的連續函数，可看作是 Ω 上的广义函数，关于它的各种运算，大約与 $\Omega=X$ 的情况相同。但如把 Ω 上的广义函数 S 反轉之，σS 就成为 $-\Omega$ 上的广义函数，如果平移之，$\tau_a S$ 就成为 $\Omega+a$ 上的广义函数。关于乘积

$$\alpha S:\quad \alpha S(\varphi)=S(\alpha\varphi)\quad[\varphi\in(\mathfrak{D})_\Omega],$$

只要 α 是 Ω 上的 C^∞ 級函数卽可：因为若把 α 向 Ω 之外任意扩展时，恒有 $\alpha\varphi\in(\mathfrak{D})_\Omega$，虽然扩展的方式不同，而 $\alpha\varphi$ 并无改变。今后关于这样的扩展将不一一申明地利用。

特别当 $\mathrm{Car}(\varphi)$ 含于 Ω 时，对于一切的 $\varphi\in(\mathfrak{D})_X$，能按照上式把 $\alpha S(\varphi)$ 定义出来：因为 $\alpha\varphi\in(\mathfrak{D})_\Omega$ 仍然成立。这时 αS 成为

X 上的广义函数。

§4 連續性的效应

現在观察根据广义函数 S 在各$(\mathfrak{D}_K)$上的連續性而产生的积极效应的一面。但如果我們深入地考察收斂性或拓扑性时，这种效应又感不足。首先，当 $a\to b$ 时，在某种意义下，有 $\tau_a S\to\tau_b S$。在这里，称之为**单純收斂**，可了解为对于各 $\varphi\in(\mathfrak{D})$，

$$\tau_a S(\varphi)\to\tau_b S(\varphi)\quad [a\to b]. \tag{4.1}$$

玆先为(4.1)的証明作些准备。

因为連續函数 $\varphi\in(\mathfrak{D})$ 在某有界閉集之外为 0，故在 X 上一致連續。从而 $a\to 0$ 时一致地 $\tau_a\varphi\to\varphi$。同理，每逢固定了 p，就一致地

$$D^p\tau_a\varphi(x)=\tau_a D^p\varphi(x)\to D^p\varphi(x).$$

从而，在某$(\mathfrak{D}_K)$有 $\tau_a\varphi\to\varphi$：至于 K，无妨取作 $\mathrm{Car}(\varphi)$［参看§2末尾］的'ε 閉邻域'

$$\{x:\ \mathrm{Car}(\varphi)\ \text{同}\ x\ \text{的距离}\leqslant\varepsilon\}\quad[\varepsilon=\mathrm{const}>0].$$

这样，当 $a\to 0$ 时——例如 $|a|<\varepsilon$——終于出現了 $\tau_a\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$，从而当然 $\tau_a\varphi\to\varphi$ in $(\mathfrak{D}_K)$。一般，把 $\varphi_j\to\varphi$ in (A) 等的意义扩大，理解为"終于变成 $\varphi_j\in(A)$"。这时，如仅考察收斂性的話，当然可把不属于(A)的 φ_j 省掉。此外，"对于某一$(\mathfrak{D}_K)$，$\varphi_j\to\varphi$"的事实叫做 φ_j 向 φ **伪收斂**(詳細的說，$(\mathfrak{D})$ 伪收斂❶)，这时必然成立 $S(\varphi_j)\to S(\varphi)$，这就是广义函数 S 的連續性。

其次假設 $a\to b$。这时

$$\tau_{-a}\varphi=\tau_{b-a}\tau_{-b}\varphi$$

向 $\tau_{-b}\varphi$ 伪收斂$[b-a\to 0]$，于是

$$\tau_a S(\varphi)=S(\tau_{-a}\varphi)\to S(\tau_{-b}\varphi)=\tau_b S(\varphi).$$

❶ 在$(\mathfrak{D})$的真收斂概念見§10.

这样就得到了(4.1)。然后考虑微系数 $D_iS=\partial S/\partial x_i$. 假設向量 $a\in X$ 的坐标,除第 i 个以外皆为 0, 仅其第 i 坐标 $a_i\neq 0$, 这时就能設想当 $a_i\to 0$ 时,

$$a_i^{-1}(S(x+a)-S(x))\to D_iS(x),$$

也就是 $a_i^{-1}(\tau_{-a}S-S)\to D_iS$. 这个結果对单純收斂也成立:

$$a_i^{-1}(\tau_{-a}S(\varphi)-S(\varphi))\to D_iS(\varphi). \tag{4.2}$$

証明 置 $\psi_a=a_i^{-1}(\tau_a\varphi-\varphi)$, 則有

$$\begin{aligned}\psi_a^{(p)}(x)&=a_i^{-1}(\varphi^{(p)}(x-a)-\varphi^{(p)}(x))\\&=-D_i\varphi^{(p)}(x-\theta a)\quad[0<\theta<1],\end{aligned}$$

因此 $\psi_a\to -D_i\varphi$ [偽收斂]。从而,

$$a_i^{-1}(\tau_{-a}S(\varphi)-S(\varphi))=S(\psi_a)\to S(-D_i\varphi)=D_iS(\varphi). \quad 証毕$$

卷积 对于 $\varphi\in(\mathcal{D})$ 及广义函数 S, 暂把 y 的函数

$$F(y)=\tau_{-y}S(\varphi)=S(\tau_y\varphi)$$

写作 $F(y: S, \varphi)$. 依据 (4.1), $F(y)$ 作为 y 的函数是連續的 [(4.1)], 且有与 $F(y)$ 同形的偏微商 $\partial F(y)/\partial y_i$, 如向(4.2)的 S 代入 $\tau_{-y}S$, 就有

$$a_i^{-1}(F(y+a)-F(y))\to D_i\tau_{-y}S(\varphi),$$

但是这个极限既能改写为 $\tau_{-y}D_iS(\varphi)$, 又能改写为 $S(-\tau_yD_i\varphi)$ [注意 $D_i\tau_y\varphi=\tau_yD_i\varphi$], 于是

$$\partial F(y)/\partial y_i=F(y: D_iS, \varphi)=F(y: S, -D_i\varphi).$$

反复行之, 則 F 成为 C^∞ 級的函数。此外, 因为可把 $D_i=\partial/\partial x_i$ 的 x_i 和 x 一同看做是形式的变数 [参看例 3.3 的后面部分], 所以从上式消掉 y 就能写成

$$D_iF(\ :S, \varphi)=F(\ :D_iS, \varphi)=F(\ :S, -D_i\varphi). \tag{4.3}$$

注意 4.1 这一系列的結果包含着

$$F(y)=\int f(x)\varphi(x-y)dx$$

的情形：只須設 S 为泛函 $\varphi \Rightarrow \int f\varphi dx$ 即可。在下面的討論中，即以这种情形作为典范。

現在用形式的积分写出，就有

$$F(y)=\int S(x)\varphi(x-y)dx.$$

把函数 F 考虑为广义函数，对于 $\psi\in(\mathfrak{D})$，就有

$$F(\psi)=\int F(y)\psi(y)dy=\int\left[\int S(x)\varphi(x-y)dx\right]\psi(y)dy.$$

如果能象普通的积分那样变更順序的話，就得

$$F(\psi)=\int S(x)\varphi*\psi(x)dx=S(\varphi*\psi),\tag{4.4}$$

这里面的函数 $\varphi*\psi$ 称为 φ 同 ψ 的卷积(convolution)，即

$$\varphi*\psi(x)=\int\varphi(x-y)\psi(y)dy.\tag{4.5}$$

随同 $\varphi,\psi\in(\mathfrak{D})$，也有 $\varphi*\psi\in(\mathfrak{D})$；实际上，$\varphi*\psi$ 是 C^∞ 級的[参看注意 4.1]，如取包含 φ，ψ 的支集的范圍 $|x|\leqslant a$，那么在 $|x|\leqslant 2a$ 之外，$\varphi*\psi(x)=0$。此外还要注意卷积类似于普通乘积的性质。例如

$$\left.\begin{array}{l}\varphi*(\psi+\omega)=\varphi*\psi+\varphi*\omega,\\ \varphi*\psi=\psi*\varphi,\quad(\varphi*\psi)*\omega=\varphi*(\psi*\omega).\end{array}\right\}\tag{4.6}$$

現在，为簡单起見，試就一維空間 $X=R^1$ 証明实际能作順序的变更 $F(\psi)=S(\varphi*\psi)$。高維空間大略相同。取如上的 a，把 $|x|\leqslant 2a$ 这样的范圍記作 K。先把 u 固定起来，如置

$$\beta_u(x)=\int_{-a}^{u}\varphi(x-y)\psi(y)dy,$$

則与 $\varphi*\psi$ 同样，$\beta_u\in(\mathfrak{D}_K)$。当 $|y|\geqslant a$ 时，$\psi(y)=0$，所以

$$F(\psi)=\int_{-a}^{a}F(y)\psi(y)dy,\quad\beta_a=\varphi*\psi,$$

从而又有

$$S(\beta_a)=S(\varphi*\psi).$$

由此可見，为了証明 $F(\psi)=S(\varphi*\psi)$，只要把 $S(\beta_u)$ 看作是 u 的函数，証明 $dS(\beta_u)/du=F(u)\psi(u)$ 卽可。为此，把 u 任意地固定下来，再使 $\varepsilon\to 0$. 按 β_u 的定义，对于所有的 x 一致地

$$\varepsilon^{-1}(\beta_{u+\varepsilon}(x)-\beta_u(x))\to\varphi(x-u)\psi(u)=\psi(u)\cdot\tau_u\varphi(x).$$

因为关于 x 的各阶微商也如是，所以

$$\varepsilon^{-1}(\beta_{u+\varepsilon}-\beta_u)\to\psi(u)\cdot\tau_u\varphi \text{ in}(\mathfrak{D}_K).$$

如再加上 S 的作用，則有

$$\varepsilon^{-1}(S(\beta_{u+\varepsilon})-S(\beta_u))=S(\varepsilon^{-1}(\beta_{u+\varepsilon}-\beta_u))\to S(\psi(u)\tau_u(\varphi))$$
$$=\psi(u)S(\tau_u\varphi)=\psi(u)F(u),$$

于是得到所求的关系。 証毕

对于不属于 $(\mathfrak{D})$ 的函数，在相当弱的条件下，也能考虑具有性质(4.6)的卷积(4.5)，这种作法被广泛地利用着。兹将(4.5)扩充于 $\varphi\in(\mathfrak{D})$ 同广义函数 S 的卷积 $\varphi*S$.

如考虑 φ 的反轉 $\sigma\varphi$: $\sigma\varphi(x)=\varphi(-x)$，就有

$$\tau_y\sigma\varphi(x)=\sigma\varphi(x-y)=\varphi(y-x),$$

于是，

$$F(y: S,\ \sigma\varphi)=S(\tau_y\sigma\varphi)=\int S(x)\varphi(y-x)dx.$$

把函数 $F(\quad : S,\ \sigma\varphi)$ 写成 $\varphi*S$. 再更换变数，卽得

$$\varphi*S(x)=S(\tau_x\sigma\varphi)=\int S(y)\varphi(x-y)dy=\tau_{-x}S(\sigma\varphi), \quad (4.7)$$

$$\varphi*S(0)=S(\check{\varphi}),\ \check{\varphi}*S(0)=S(\varphi)\ [\text{此处，0是 } R^n \text{ 的原点}]。\quad (4.7')$$

仿照(4.6)的第二公式，也能把 $\varphi*S$ 記作 $S*\varphi$. 例如，

$$\delta*\varphi(y)=\delta(\tau_y\sigma\varphi)=\varphi(y).$$

偕同 F，卷积 $\varphi*S$ 也是 C^∞ 級的函数，根据(4.3)及明显的公式 $D_i\sigma\varphi=-\sigma D_i\varphi$，卽得

$$D_i(\varphi*S)=\varphi*D_iS=(D_i\varphi)*S. \quad (4.8)$$

从而可以省掉括弧，而写成 $D_i\varphi*S$，$D_iS*\varphi$，并且这样也不会招致混乱。对一般的 D^p 及平移而言也是一样：把(4.7)的 x 代以 $x-a$，显見

$$\tau_a(S*\varphi)=\varphi*\tau_aS=(\tau_a\varphi)*S. \tag{4.9}$$

把函数 $S*\varphi$ 考虑作广义函数，根据(4.4)乃有

$$S*\varphi(\psi)=S((\sigma\varphi)*\psi)\quad[\psi\in(\mathfrak{D})]. \tag{4.10}$$

試把 $\sigma\varphi$ 代入于这个 φ. 注意 $\sigma\sigma\varphi=\varphi$，并用 $\check{\varphi}=\sigma\varphi$，以避免記号的繁杂，于是就有

$$S*\check{\varphi}(\psi)=S(\varphi*\psi)=S*\check{\psi}(\varphi); \tag{4.11}$$

在第二等号中利用了 $\varphi*\psi=\psi*\varphi$.

例 4.1 如同前面的 $\delta*\varphi=\varphi$，δ 是卷积的单位。又按卷积，可以用 $\delta^{(p)}$ 代替 D^p，用 δ_a 代替 τ_a，这样就有

$$\delta^{(p)}*\varphi=D^p\delta*\varphi=D^p\varphi\quad[\text{参看(4.8)的說明}],$$

$$\delta_a*\varphi=\tau_a\delta*\varphi=\tau_a\varphi\quad[\text{参看(4.9)}].$$

例 4.2 相当于(4.6)的性质也成立。例如，驗証

$$(S*\varphi)*\psi=S*(\varphi*\psi).$$

对于 x，左端的值为

$$\tau_{-x}S*\varphi(\sigma\psi)=\tau_{-x}S((\sigma\varphi)*(\sigma\psi)),$$

但根据明显的公式 $(\sigma\varphi)*(\sigma\psi)=\sigma(\varphi*\psi)$，它与 $S*(\varphi*\psi)$ 对于 x 的值一致。

正則化 借助卷积，能用 C^∞ 級的函数逼近广义函数 S。首先，設 ε 为参数 >0[后来要使 $\varepsilon\to0$]，然后再作如下的定义 $\alpha_\varepsilon(x)$：

$$\left.\begin{array}{l}\sigma\alpha_\varepsilon=\alpha_\varepsilon\in(\mathfrak{D})_x,\quad \int\alpha_\varepsilon(x)dx=1,\\ \text{常有 }\alpha_\varepsilon(x)\geq0,\text{ 但在 }|x|\geq\varepsilon\text{ 时 }\alpha_\varepsilon(x)=0.\end{array}\right\} \tag{4.12}$$

例如，利用(1.7)的 κ_ε，就能如下地作出来：

$$\alpha_\varepsilon(x)=\kappa_\varepsilon(|x|^2)/c_\varepsilon,\quad c_\varepsilon=\int\kappa_\varepsilon(|x|^2)dx.$$

由(4.12)那样的 α_ε 所作的函数系 $S*\alpha_\varepsilon$，叫做广义函数 S 的正則化。$S*\alpha_\varepsilon$ 是 C^∞ 級的函数。特別对于連續函数 f 的正則化

$$f*\alpha_\varepsilon(x)=\alpha_\varepsilon*f(x)=\int\alpha_\varepsilon(y)f(x-y)dy,$$

因为 $\int$ 实际是在 $|y|<\varepsilon$ 的积分，所以

$$\left.\begin{array}{l}\text{若函数 } f \text{ 在 } X \text{ 上一致連續，则当 } \varepsilon\to 0\\ \text{时，在 } X \text{ 上一致地 } \alpha_\varepsilon*f(x)\to f(x).\end{array}\right\}\qquad(4.13)$$

又据(4.12)的最后条件，在 $\mathrm{Car}(f)$ 的 ε 閉邻域之外，$\alpha_\varepsilon*f(x)=0$，因此 $\mathrm{Car}(\alpha_\varepsilon*f)$ 含于这个閉邻域之中。$\varphi\in(\mathfrak{D})$ 时，$\mathrm{Car}(\varphi)$ 的閉邻域 K 有界，終于 $\alpha_\varepsilon*\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$；此处若使(4.13)适用于 $(\alpha_\varepsilon*\varphi)^{(p)}=\alpha_\varepsilon*\varphi^{(p)}$，则有

$$\varepsilon\to 0 \text{ 时 } \alpha_\varepsilon*\varphi\to\varphi\ [(\mathfrak{D}) \text{ 伪收斂}].\qquad(4.14)$$

另外，由于 $\sigma\alpha_\varepsilon=\alpha_\varepsilon$ 及(4.14)，则有

$$S*\alpha_\varepsilon(\varphi)=S(\alpha_\varepsilon*\varphi)\to S(\varphi);\qquad(4.15)$$

若把 C^∞ 級的函数 $S_\varepsilon=S*\alpha_\varepsilon$ 考虑作广义函数，S_ε 就在单純收斂的意义下逼近于 S。

逼近函数也可从($\mathfrak{D}$)选出　为此，令

$$\beta_\varepsilon\in(\mathfrak{D}),\quad \text{在 } |x|\leqslant\varepsilon^{-1},\quad \beta_\varepsilon(x)=1;\qquad(4.16)$$

例如，

对 $|x|\leqslant\varepsilon^{-1}+1$，取 $f_\varepsilon(x)=1$，对 $|x|\geqslant\varepsilon^{-1}+2$，取 $f_\varepsilon(x)=0$，这样取的 f_ε 是連續函数，然后再令 $\beta_\varepsilon=\alpha_\varepsilon*f_\varepsilon$ 即可。虽则 $\beta_\varepsilon S_\varepsilon\in(\mathfrak{D})$，然如固定 $\varphi\in(\mathfrak{D})$ 使 $\varepsilon\to 0$，終于会有 $\beta_\varepsilon\varphi=\varphi$，而且

$$\beta_\varepsilon S_\varepsilon(\varphi)=S_\varepsilon(\beta_\varepsilon\varphi)\to S(\varphi).\qquad(4.17)$$

不定积分[原广义函数]　利用正則化，在一維空間試从 $S'=0$ 导出 $S=c=\mathrm{const}$，即

$$S(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}c\cdot\varphi(x)dx=c\cdot\int_X\varphi\,dx.$$

按假定，$(S*\alpha_\varepsilon)'=S'*\alpha_\varepsilon=0$，因此根据普通微分法的定理，就有

$$S*\alpha_\varepsilon(x)=c_\varepsilon=\mathrm{const},$$

$$S*\alpha_s(\varphi)=c_s\int_X \varphi\,dx \quad [\to S(\varphi)].$$

若就 $\int_X \varphi\,dx\neq 0$ 的情形考虑，即知极限 $c=\lim c_s$ 存在。利用这个 c，就一般的 φ 来說，也有

$$S(\varphi)=\lim c_s\int_X \varphi\,dx=c\int_X \varphi\,dx.$$ 証毕

但是若把这个 $S(\varphi)$ 記作 $c(\varphi)$ 就有混乱的危险。故此我們以后記作 $\langle c,\ \varphi\rangle$。

对任意的广义函数 T[一維]，能够給出'原广义函数'或說'不定积分'，也就是适合 $S'=T$ 的广义函数 S。为了这个目的，可决定一个适当的一意对应 $J:(\mathfrak{D})\ni\varphi\Rightarrow J(\varphi)\in(\mathfrak{D})$，幷令

$$S(\varphi)=-T(J(\varphi)). \tag{4.18}$$

为了使 S 成为广义函数，只要

J 是綫性的，而且关于伪收斂連續 (4.19)

即可。又为使 $S'=T$，只要

对于一切 φ，$J(\varphi')=\varphi$ (4.20)

即可。事实上，若(4.20)成立，則有

$$S'(\varphi)=-S(\varphi')=T(J(\varphi'))=T(\varphi).$$

現在就制定这样的 J。如取例 1.1 的 Y，

$$Y*\varphi(x)=\int_{-\infty}^{x}\varphi(y)dy,$$

那么它就在 $\mathrm{Car}(\varphi)$ 之左为 0，在其右則与 $\langle 1,\ \varphi\rangle=\int_X \varphi\,dx$ 一致。这样，如取使 $\int_X \alpha\,dx=1$ 的 $\alpha\in(\mathfrak{D})$，函数

$$\psi=Y*\varphi-\langle 1,\ \varphi\rangle\cdot\alpha$$

就在 $\mathrm{Car}(\varphi)\cup\mathrm{Car}(\alpha)$ 之左右为 0，从而 $\psi\in(\mathfrak{D})$。若固定 α，則对应 $\varphi\Rightarrow J(\varphi)=\psi$ 就是綫性的，而且

$$\psi'=(Y*\varphi)'-\langle 1,\ \varphi\rangle\cdot\alpha'=\varphi-\langle 1,\ \varphi\rangle\alpha',$$

$$\psi^{(p)} = \varphi^{(p-1)} - \langle 1, \varphi \rangle \cdot \alpha^{(p)},$$

由此推出(4.19)的連續性。并且根据 $\langle 1, \varphi' \rangle = 0$，(4.20) 則是显然的。

对于上面所制定的 S，T 的原广义函数的一般形状是 $S+\mathrm{const}$. 在 n 維空間，也可同样求得 $\partial S/\partial x_i = T$ 的一个解 S. 关于解的一般形状俟叙述直积部分时再談，不过要注意下列的事实。

定理 4.1 若 $D_1 S = \partial S/\partial x_1$ 等于 0，則对于 x_1 方向的所有的平移 $\tau_u[u=(t, 0, \cdots, 0)]$，$S$ 不变，即 $\tau_u S = S$. 逆理也成立。

証明 若 $D_1 S = 0$，根据 $D_1 S * \check{\varphi}(x) = 0$，則有 $\tau_u S * \check{\varphi}(x) = S * \check{\varphi}(x)$；如設 $x=0$，則有 $\tau_u S(\varphi) = S(\varphi)$. 逆理由(4.2)自明。

§5 局部可积函数

对于某种不連續函数 f，利用普通的积分——詳細說，是 Lebesgue 积分——也能制定广义函数

$$L_f: \quad L_f(\varphi) = \int_X f\varphi\, dx \qquad [\varphi \in (\mathcal{D})]$$

[参看例 3.3]. 这里一般地指 f 在 X 上局部可积，就是說对于各点 $x \in X$，在 x 的某邻域 U 可积，即存在着有限的 $\int_U |f|\, dx$，$\int_U f\, dx$. 这时，因为有界閉集 $K = \mathrm{Car}(\varphi)$ 可用某有限个 U 所复盖，所以 f 在 K 上也可积，从而可得有限的积分 $L_f(\varphi)$，这是因为在 K 外 $f\varphi$ 为 0 的緣故。这时 L_f 和 f 为連續函数的情形一样而成为广义函数。

这里虽然 $L_f = L_g$，但不必有 $f = g$. 在例 3.3 就已見到，在不連續点上的差別并无重視的必要。如把几乎到处❶一致的函数看做同一的东西，这样，与 $L_f = L_g$ 对应的就有 $f = g$，于是可认为

❶ 例外点之集的 Lebesgue 测度为 0.

$f=L_f$。这将在§6作更一般的处理，这里不作証明。与具有連續微商的連續函数的情况不同，一般說来，微商[普通的微分法]，与微商广义函数有差别。为区别起見，仿照例3.3，把微商記作$[D^p f]$等。

例 5.1 Heaviside 函数[例1.1]的微商广义函数 $Y'=\delta$ 虽然不是0，但微商 $[Y']=0$ ——实际在原点以外到处如此——作为广义函数考慮它也是0。

例 5.2 在二維空間 $X=R^2$，函数

$$f(x)=\log|x|=\log\sqrt{x_1^2+x_2^2},$$
$$g(x)=[\partial f/\partial x_1]=x_1/|x|^2$$

都局部可积，因而可作广义函数考慮。实际，若把这个微商 g 看做广义函数，就与微商广义函数 $\partial f/\partial x_1=\partial L_f/\partial x_1$ 一致；这因为，只要除去 $x_2=0$，就有

$$f(x_1, x_2)=\int g(x_1, x_2)\,dx_1 \quad [\text{普通的不定积分}],$$

因此可得如(1.3)那样的分部积分

$$g(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g\varphi\,dx_1\,dx_2$$
$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx_1\,dx_2=-L_f\Big(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\Big)=\frac{\partial L_f}{\partial x_1}(\varphi).$$

因为二阶微商 $[\partial^2 f/\partial x_1^2]$ 不是局部可积的——在原点的邻域絕对值的积分为∞——，所以用本节的方法不成广义函数。如考慮作为函数的 Laplace 算符(Laplacian)

$$h=[\Delta f]=[\partial^2 f/\partial x_1^2]+[\partial^2 f/\partial x_2^2],$$
$$\Delta=\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2,$$

在原点以外 $h(x)=0$。从而把 h 看做广义函数則有 $L_h=0$。作为广义函数的 $f=\log|x|$ 的 Laplace 算符，如下所示，則是

$$\Delta\log|x|=2\pi\delta\neq 0.$$

首先注意一般有 $\Delta S(\varphi)=S(\Delta\varphi)$。若命圓周 C: $|x|=\varepsilon$ 的外部 $|x|>\varepsilon$ 为 Ω，則有

$$\Delta f(\varphi)=f(\Delta\varphi)=\int_X f\cdot\Delta\varphi\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega f\cdot\Delta\varphi\,dx,$$

于此試用 Green 公式，得到

$$\int_\Omega f\cdot\Delta\varphi\,dx-\int_\Omega\varphi\cdot[\Delta f]dx=\int_C f\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}ds-\int_C\varphi\cdot\frac{\partial f}{\partial\nu}ds$$

[ds 是圓周的綫素，ν 是內向法綫]。

因 $[\Delta f]=0$，故 Green 公式的左端第二项为 0。虽使 ε 变动，$\partial\varphi/\partial\nu$ 也保持有界，因而右端第一项与 $\varepsilon\log\varepsilon$ 是同阶的无穷小。右端的第二项是

$$-\int_C\varphi\cdot[\partial f/\partial\nu]ds=\int_C\frac{\varphi}{\varepsilon}ds\to2\pi\varphi(0).$$

綜合上述，即得

$$\Delta f(\varphi)=2\pi\varphi(0)\quad\text{即}\quad\Delta f=2\pi\delta.$$

例 5.3 在 $X=R^n$，$n>2$，也同样有

$$\Delta|x|^{2-n}=(2-n)c\cdot\delta,\quad c=2\sqrt[n]{\pi}/\Gamma(n/2),$$

$$\Delta=\sum_{i=1}^n\partial^2/\partial x_i^2\quad[\text{Laplace 算符}].$$

系数 c 是 R^n 中单位球面 $|x|=1$ 的表面积。$n=1$ 时这个公式也成立。它与 $\varphi\in(\mathfrak{D})$ 的卷积是

$$\Delta|x|^{2-n}*\varphi(x)=(2-n)c\cdot\varphi(x)\quad[X=R^n,\ n\neq2],$$

$$\Delta\log|x|*\varphi(x)=2\pi\varphi(x)\quad[X=R^2].$$

这是場位理論 (Potential theory) 中的基本公式。

在这个例子中也有 $[\partial|x|^{2-n}/\partial x_1]=\partial|x|^{2-n}/\partial x_1$。現在把微系数一致的判别准則一般地归納一下。为此，先把 $x\in R^n$ 作如下的分解：

$$x=(x_1,y),\quad y=(x_2,\cdots,x_n)\in R^{n-1}.$$

我們把 y 固定了的函数等式 $f(x)=g(x)$，例如下面的(5.1)，了解为"对于几乎所有的 x_1 而言"。

定理 5.1 設 f,g 在 $X=R^n$ 上局部可积，如果对于几乎所有的 $y=(x_2,\cdots,x_n)\in R^{n-1}$，有

$$f(x)=\int g(x)dx_1\quad[\text{普通的不定积分}],\tag{5.1}$$

则作为 X 上的广义函数有

$$\partial f/\partial x_1=g=[\partial f/\partial x_1].$$

反之，把 X 上的局部可积函数 f,g 看做广义函数时，如果 $\partial f/\partial x_1$

$=g$，則对于几乎所有的 y，关系(5.1)成立。

前半的証明与例 5.2 相同。茲把后半的証明略为粗糙地叙述一下；詳情可参看下面的注意 5.1。g 在 X 上局部可积，同样，

$$f_0(x)=f_0(x_1, y)=\int_0^{x_1} g(t, y)\,dt$$

也在 X 上局部可积。于此引用前半，則有

$$\partial f_0/\partial x_1=g=\partial f/\partial x_1 \quad [\text{广义函数的微分法}].$$

設 τ_u 是 x_1 方向的平移，并設 $u\neq 0$，若对 $h=f-f_0$ 引用定理 4.1，以之作为广义函数乃有 $\tau_u h=h$。由此可見，作为函数也有 $\tau_u h=h$ [在 X 上几乎到处成立]。如将它看做 x_1 的函数 h 的性质的話，就有

$$h(x_1, y)=\text{const} \quad [\text{得到了与 } y \text{ 的关系}],$$

于是

$$f=f_0+\text{const}=\int g\,dx_1.$$

注意 5.1 詳細地說，对于几乎所有的 y，

(0) 作为 x_1 的函数，g，h 就是局部可积的，

而当 u 确定了的时候，对于几乎所有的 y，

(u) 作为 x_1 的函数，就得到 $\tau_u h=h$。

如仅取趋近于 0 的序列 $u=u_j[j=1, 2, \cdots]$，条件(0)，(u_j)就成为可数个，这时当能考虑它們对"几乎所有"的 y 的共同性质。固定一个这样的 y，則关系(u_j)就成为 x_1 軸上的广义函数等式，因此得到作为广义函数的 $h'=0$，从 §4 的結果[不定积分部分 20 頁]可得 $h=\text{const}$。

本节的討論，如考虑开集 Ω 上的局部可积函数，就能局部化。定理 5.1 能适用于 y 为定数的直綫与 Ω 所截的各綫段(或半直綫)上；不过要作詳細的叙述，将是很复杂的。

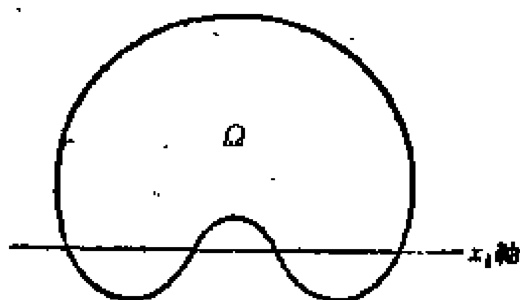


图 5.1

§6 測　度

局部可积函数 f 也可认为是純量 (scalar quantity) 的分布密度——空間密度。例如，当 $f\geqslant 0$ 时，即恒有 $f(x)\geqslant 0$ 时，把有界点集 $E\subset X$ 的质量取作

$$m_f(E)=\int_E f\,dx, \tag{6.1}$$

就規定了正値的质量分布 m_f，采用 dm_f 的积分可由下式定义：

$$\int\varphi\,dm_f=\int f\varphi\,dx. \tag{6.2}$$

考虑积分 (6.1) 时，必須对集 E 的种类多少加以限制。暂且把 E 一般地看成 X 内的有界 Borel 集❶。另外若假設在点 a 处置以单位质量

$$\mu(E)=1\quad[a\in E],\qquad \mu(E)=0\quad[a\bar{\in} E],$$

这样的分布 μ 就不能表示为(6.1)的形式。

更一般地，考虑完全加性的复数値集函数 μ: $E\Rightarrow\mu(E)$. 并且假定如下的性质：

> 对于各个有界 Borel 集 E，复数 $\mu(E)$ 唯一确定。若把 E 至多分解为可数个互不相交的 Borel 集 $E_1, E_2, \cdots$，则有 $\mu(E)=\mu(E_1)+\mu(E_2)+\cdots$.

这种 μ 叫做 X 上的測度。其概念与普通所説的測度多少有些不同。不限于 $f\geqslant 0$，对于一般的局部可积函数 f，依照(6.1)，也能規定測度 m_f。特别当 $\mu\geqslant 0$ 时，即恒有 $\mu(E)\geqslant 0$ 时，按照普通的积分理論，就能确定$(\mathfrak{D})$上的綫性泛函

$$L_\mu:\ L_\mu(\varphi)=\int_X\varphi\,d\mu\quad[\varphi\in(\mathfrak{D})], \tag{6.3}$$

❶ 积分是主要的，并无拘泥于 Borel 集的定义的必要，可参看如本丛书河田敬义著：《集合、拓扑、測度》一书。

在$(\mathfrak{D}_K)$上

$$|L_\mu(\varphi)|\leqslant\mu(K)\|\varphi\|_\infty\quad[\mu\geqslant 0,\ \varphi\in(\mathfrak{D}_K)].\qquad(6.4)$$

例如,对置于点a的单位质量μ积分之,$L_\mu(\varphi)$就成为$\varphi(a)$。

关于复数值的μ,考虑綫性泛函(6.3),也能扩充积分的定义。首先,我們知道对于实值μ,即$\mu(E)$恒为实数的情形,μ可把它分解成两测度$\mu_1\geqslant 0$, $\mu_2\geqslant 0$的'差'.

$$\mu=\mu_1-\mu_2:\ \mu(E)=\mu_1(E)-\mu_2(E)$$

[测度的和,定数倍积也仿此]。

因此规定积分为

$$\int\varphi\,d\mu=\int\varphi\,d\mu_1-\int\varphi\,d\mu_2;$$

一个μ的分解$\mu_1-\mu_2$虽有多种,但积分之差都是一致的。关于一般的μ,把$\mu(E)$分为实部$\Re\mu(E)$与虚部$\Im\mu(E)$:

$$\mu(E)=\Re\mu(E)+\sqrt{-1}\,\Im\mu(E),$$

其$\Re\mu$, $\Im\mu$都是实值测度。这样就定义了

$$\int\varphi\,d\mu=\int\varphi\,d\Re\mu+\sqrt{-1}\int\varphi\,d\Im\mu.$$

例 6.1 关于以一般的局部可积函数f为'密度'的测度m_f, (6.2)也成立。而且若是[普通意义的]几乎到处$f=g$,则$m_f=m_g$;其逆也成立。

例 6.2 对于局部有限[参看例 3.2]的点集$M\subset X$的各点$a\in M$,使复数c_a与之对应,并設其中属于E的点a的'負荷'(charge)的总和为$\mu(E)$:

$$\mu(E)=\sum_{a\in E}c_a,$$

这样μ就成为测度。这叫做离散测度;也可叫做离散的純量分布。依据这种μ的积分是

$$L_\mu(\varphi)=\int_X\varphi d\mu=\sum_{a\in E}c_a\cdot\varphi(a).$$

$\mu\geqslant 0$时借助(6.4)即可知道L_μ在$(\mathfrak{D}_K)$上的連續性:当$\varphi_j\to\varphi$ in$(\mathfrak{D}_K)$时,

$$|L_\mu(\varphi_j)-L_\mu(\varphi)|=|L_\mu(\varphi_j-\varphi)|\leqslant\mu(K)\cdot\|\varphi_j-\varphi\|_\infty\to 0,$$

于是 $L_\mu(\varphi_j) \to L_\mu(\varphi)$。这种連續性随着积分的扩充依次递傳，由一般的 μ 所决定的 L_μ 也是广义函数。这种連續性稍有特殊，L_μ 是

关于在各个 $(\mathfrak{D}_K)$ 上簡单的一致收斂 $[\|\varphi_j-\varphi\|\to 0]$ 連續　　(6.5)

須要注意在积分定义里面，φ 的可微性并不直接发生联系。为了利用古典理論，要考虑較 $(\mathfrak{D})$ 寬广的函数族 (C) 上的泛函

$$\tilde{L}_\mu:\ \tilde{L}_\mu(\varphi)=\int_X \varphi\,d\mu\quad [\varphi\in(C)]. \tag{6.6}$$

(C) 是具有有界支集的連續函数的全体。这与 $(\mathfrak{D})$ 一样，也可表成：

$$(C)=\bigcup_K (C_K)\quad [\text{取所有的有界閉集 } K],$$

$$(C_K)=\{\varphi;\ \varphi \text{ 是 } X \text{ 上的連續函数}, \mathrm{Car}(\varphi)\subset K\}.$$

不論 (C) 或是 (C_K) 都是复系数的向量空間，必有 $(\mathfrak{D})\subset(C)$，$(\mathfrak{D}_K)\subset(C_K)$。在 (C_K)，是把一致收斂 $\varphi_j\to\varphi$ 取作固有的收斂 $\varphi_j\to\varphi$ in (C_K)，連續性也就是按照这种收斂来考虑的。

$\tilde{L}_\mu$ 是 (C) 上的綫性泛函，在各 (C_K) 上連續。相反地有：

定理 6.1　(C) 上的綫性泛函 $\tilde{S}$ 若在各 (C_K) 上連續，則 $\tilde{S}$ 依据某种測度 μ 就可表为 $\tilde{S}=\tilde{L}_\mu$，这样的 μ 对于 $\tilde{S}$ 唯一确定。特别，(i) 对于实値的 φ，如果 $\tilde{S}(\varphi)$ 恒是实数的話，μ 就是实值測度；(ii) 当 $\varphi\geqslant 0$ 时，如果恒有 $\tilde{S}\geqslant 0$，則 $\mu\geqslant 0$。

关于 (i)，(ii) 的情形，μ 的存在及其唯一性可参考积分論。至于一般的情形，和广义函数一样，把綫性泛函 $\tilde{S}$ 分为实部与虚部，就能化成 (i) 的情形；詳情希望讀者自行驗証。

此外，若把 K 固定了，$\tilde{S}$ 的連續性就能以某[与 φ 无关的]定数 a 表为如下的形状：

$$|\tilde{S}(\varphi)|\leqslant a\cdot\|\varphi\|_\infty\quad [\varphi\in(C_K)]. \tag{6.7}$$

实际上，从 (6.7) 就能知道連續性是明显的，反之，假如不存在如

(6.7) 中的 a，綫性泛函 $\tilde{S}$ 就不連續，这一事实証明如下：

按照假定，不論取怎样的 $a>0$，总应发生反于 (6.7) 的情况。設其为

$$\varphi_a\in(C_K),\quad |S(\varphi_a)|>a\cdot\|\varphi_a\|_\infty.$$

留意 $S(\varphi_a)\neq 0$，且如考虑

$$c_a=1/S(\varphi_a),\quad \psi_a=c_a\varphi_a\in(C_K),$$

当 $a\to\infty$ 时則有

$$\|\psi_a\|_\infty=|c_a|\cdot\|\varphi_a\|_\infty<1/a\to 0,$$

因之，$\psi_a\to 0$ in (C_K)。然而根据 $\tilde{S}$ 是綫性的，就能知道

$$\tilde{S}(\psi_a)=c_a\tilde{S}(\varphi_a)=1,\quad \tilde{S}(0)=0,$$

于是 $\tilde{S}(\psi_a)$ 并不趋近 $\tilde{S}(0)$。

如果限定在 $(\mathfrak{D})$ 上考虑問題的話，$\tilde{L}_\mu$ 还原为 L_μ，$\tilde{L}_\mu$ 的連續性就成为 (6.5)。这样就証明了 $\tilde{S}=\tilde{L}_\mu$ 在較狹的函数族 $(\mathfrak{D})$ 上的特征：

定理 6.2 若 $(\mathfrak{D})$ 上的綫性泛函 S 具有連續性 (6.5)，就能把 S 象前定理那样'扩展'于 $\tilde{S}$ [規定 $\tilde{S}$，在 $(\mathfrak{D})$ 上要与 S 一致]，这样的 $\tilde{S}$ 是由 S 唯一确定的。从而，S 可依据某种測度 μ 表为 $S=L_\mu$，这里的 μ 是由 S 唯一确定的。

为了观察其实况，利用与 (6.7) 同样得来的

$$|S(\psi)|\leqslant a_K\|\psi\|_\infty\quad [\psi\in(\mathfrak{D}_K),\ a_K=\text{const}]\tag{6.8}$$

以及 $\varphi\in(C)$ 的正則化 $\alpha_\varepsilon*\varphi$ [§4] 比較簡便。先把 (4.13) 用于 $f=\varphi$。φ 虽然属于某 (C_K)，但如

$$\varphi\in(C_K),\quad H \text{ 是 } K \text{ 的閉邻域},\tag{6.9}$$

則 φ 也属于 (C_H)，再使 $\varepsilon\to 0$，

$$\left.\begin{array}{l}\text{終于 } \alpha_\varepsilon*\varphi\in(\mathfrak{D}_H)\text{，从而 }\in(C_H)\text{，}\\ \text{而且一致地 } \alpha_\varepsilon*\varphi\to\varphi.\end{array}\right\}\tag{6.10}$$

因此，若有連續的扩展 $\tilde{S}$，則有

$$S(\alpha_\varepsilon*\varphi)=\tilde{S}(\alpha_\varepsilon*\varphi)\to\tilde{S}(\varphi),$$

$\tilde{S}$ 是由 S 所确定；惟要注意极限的唯一性！

为証明扩展的存在，将此反用一下，置

$$\tilde{S}(\varphi)=\lim S(\alpha_\varepsilon*\varphi).$$

特别，如 $\varphi\in(\mathfrak{D})$，因 S 的連續性，$S(\varphi)$ 就是这个极限。现在只要再証明如下的事实就够了：(i) 对于一般的 $\varphi\in(C)$ 也有有限的极限，(ii) 前定理的条件成立。要証明(i)，只要驗証 Cauchy 的判别准則：

$$S(\alpha_\varepsilon*\varphi)-S(\alpha_\eta*\varphi)\to 0\quad[\varepsilon,\ \eta\to 0]$$

即可。为此根据(6.10)，作为(6.9)，$\alpha_\varepsilon*\varphi-\alpha_\eta*\varphi$ 終于 $\in(\mathfrak{D}_H)$，而且一致地 $\to 0$，从而

$$S(\alpha_\varepsilon*\varphi)-S(\alpha_\eta*\varphi)=S(\alpha_\varepsilon*\varphi-\alpha_\eta*\varphi)\to S(0)=0.$$

(ii)：設 a，b 是任意定数，就依次有

$$\alpha_\varepsilon*(a\varphi+b\psi)=a\cdot\alpha_\varepsilon*\varphi+b\cdot\alpha_\varepsilon*\psi,$$

$$S(\alpha_\varepsilon*(a\varphi+b\psi))=a\cdot S(\alpha_\varepsilon*\varphi)+b\cdot S(\alpha_\varepsilon*\psi),$$

$$\tilde{S}(a\varphi+b\psi)=a\cdot\tilde{S}(\varphi)+b\cdot\tilde{S}(\psi),$$

于是 $\tilde{S}$ 是綫性的。若把(6.8)[但其 K 代之以 H]用于(6.10)的 $\alpha_\varepsilon*\varphi\in(\mathfrak{D}_H)$，則有

$$|S(\alpha_\varepsilon*\varphi)|\leqslant a_H\|\alpha_\varepsilon*\varphi\|_\infty,$$

再取两端的极限即得 $\tilde{S}$ 的連續性

$$|\tilde{S}(\varphi)|\leqslant a_H\|\varphi\|_\infty\quad[\varphi\in(C_K)].$$

这是因为当一致地 $\varphi_j\to\varphi$ 时，$\|\varphi_j\|_\infty\to\|\varphi\|_\infty$。 証毕

根据上述两定理，由 μ，$\tilde{S}=\tilde{L}_\mu$，$S=L_\mu$ 中的每一个皆可决定其余的两个，因此就把这三者看成等同的，于是就可把 $\tilde{S}(\varphi)$ 写成 $S(\varphi)$，把 $L_\mu(\varphi)$ 写成 $\mu(\varphi)$。(6.5) 实际是"作为广义函数之测度"的特征。对于作为集函数的定数倍积 $a\mu$ 或是 $\mu_1+\mu_2$，$\Re_\mu$，$\Im_\mu$ 等自然依次对应于作为綫性泛函的 $a\mu$，… 等。

例 6.3 前节所用 $f=L_f$ 的意义，根据例 6.1 的关系来看，就是 $f=m_f$。又設 f 是 R^1 上的局部可积函数，由

$$S(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\varphi(t, 0, \cdots, 0)dt$$

也可决定 $X=R^n$ 上的測度 S。这是置于直綫 $x_2=\cdots=x_n=0$ 上的綫密度 f 的測度。同样可以考虑分布于曲綫上的綫密度或是置于曲面上的面密度等。

例 6.4 若把置于点 a 的单位质量看作广义函数，就成为 δ_a。在这种意义下，也称 $\delta=\delta_0$ 为 Dirac 測度。例 6.2 的离散測度也可表成 $\sum_{a\in M} c_a\delta_a$。关于一对特别的点測度

$$\mu_\varepsilon=\varepsilon^{-1}\delta_{a+\varepsilon b}-\varepsilon^{-1}\delta_a$$

$[a, b\in X, \varepsilon$ 是实数 $\neq 0]$，

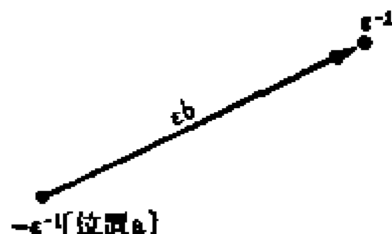


图　6.1

考虑一阶的微分运算

$$D=-\sum_{i=1}^{n} b_i\partial/\partial x_i \quad [b=(b_1, \cdots, b_n)],$$

当 $\varepsilon\to 0$ 时 μ_ε“趋近”于 $D\delta_a$ [单純收斂]，即

$$\mu_\varepsilon(\varphi)=\frac{\varphi(a+\varepsilon b)-\varphi(a)}{\varepsilon}\to -D\varphi(a)=D\delta_a(\varphi).$$

最好把 $D\delta_a$ 考虑作偶极子 (dipole)；a 表示位置，b 以及 D 表示力矩。再者，給予每个点 $a\in M$ 以力矩 $D=D_a$，就能作出偶极子的离散分布 $\sum_{a\in M} D_a\delta_a$。若把例 3.3 的微分法的各公式以及象在 §4 所提示的

$$\varepsilon^{-1}f-\varepsilon^{-1}\tau_\varepsilon f\to f' \quad [\text{广义函数的单純收斂}]$$

等合并考虑的話，就能得出物理的解釋。

作为試驗的函数 φ，虽限于 $\varphi\in(\mathfrak{D})$ 也能判断定理 6.1 后半的真实性。特别能把 (ii) 进一步地精密化：

定理 6.3 (i) 对实值的 $\varphi\in(\mathfrak{D})$，$\mu(\varphi)$ 恒为实数时，作为集函数的測度 μ 就是实数。(ii) $(\mathfrak{D})$ 上的綫性泛函 S 对于 $0\leqslant\varphi\in(\mathfrak{D})$ 恒为 $S(\varphi)\geqslant 0$ 时，S 就是測度 $\geqslant 0$。

(i) 的成立是因为能写成 $\mu=\Re\mu$ 之故。(ii)：首先闡明連續性 (6.5)。仿照 (4.16)，取 $\beta\in(\mathfrak{D})$，使得

$$\beta\geqslant 0, \text{ 在 } K \text{ 上 } \beta\geqslant 1.$$

对于 $\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$，如留意到 $\psi=\|\varphi\|_\infty\beta\geqslant 0$，则得 $\psi\geqslant\varphi$，于是

$$\text{因 } \psi\pm\Re\varphi\geqslant 0 \quad \text{得} \quad S(\psi)\pm S(\Re\varphi)\geqslant 0,$$

因 $\psi \pm \Im\varphi \geqslant 0$ 得 $S(\psi) \pm S(\Im\varphi) \geqslant 0$。

由 $S(\varphi) = S(\Re\varphi) + \sqrt{-1}\,S(\Im\varphi)$ 以及上面的結果，可得

$$|S(\varphi)| \leqslant |S(\Re\varphi)| + |S(\Im\varphi)| \leqslant 2S(\psi) = 2S(\beta)\cdot\|\varphi\|_\infty;$$

$2S(\beta)$ 与 φ 无关。因此判明了連續性；于是 S 就是测度。然后，一般設 $0 \leqslant \varphi \in (C)$，由 $0 \leqslant \alpha_\varepsilon * \varphi \in (\mathfrak{D})$ 即得 $S(\alpha_\varepsilon * \varphi) \geqslant 0$，取极限后，即得 $S(\varphi) \geqslant 0$。从而 S 是测度 $\geqslant 0$。

系 当 $0 \leqslant \varphi \in (\mathfrak{D})$ 时，若恒有 $f(\varphi) \geqslant 0$，則局部可积函数 $f(x)$ 便 $\geqslant 0$ [几乎到处]。

这是因为集函数 $m_f \geqslant 0$ 之故[根据积分論]。此外，(i)，(ii) 以及系的逆理都很显明。

§7 局部与全域的关系，广义函数的支集

在 $X = R^n$ 中取开集 Ω，和前节一样也能建立"Ω 上测度"的理論。这时对测度 $\mu(E)$ 所考虑的 Borel 集 E 不单是有界，并設为"有界而且閉包 $\bar{E}$ 含于 Ω 之內"。其他种种理論的局部化，以及关于 X 的子集的有界性也都作相应的改变。这样就仅取关于含在 Ω 之内的 K 的 (C_K)，且以

$$(C)_\Omega = \bigcup_{K \subset \Omega} (C_K)$$

代替 (C)。

理論的局部化之外，如同把 X 上的函数仅限于 Ω 上的那样，也能对各个广义函数作 Ω 上的局部化。更一般地，設

$$\Omega \subset G, \quad G \text{ 是开集，从而 } (\mathfrak{D})_\Omega \subset (\mathfrak{D})_G,$$

并考虑 $(\mathfrak{D})_G$ 上的綫性泛函 S。如使 S 仅作用于 $\varphi \in (\mathfrak{D})_\Omega$，則重新得到 $(\mathfrak{D})_\Omega$ 上的綫性泛函

$$T:\ (\mathfrak{D})_\Omega \ni \varphi \Rightarrow T(\varphi) = S(\varphi),$$

假如 S 是 G 上的广义函数，T 就是 Ω 上的广义函数。这个 T 叫做在 Ω 上局部化了的 S，或叫做在 Ω 上所考虑的 S 等。当 T 具

有某种性质时，就說在 Ω 上 S 具有該种性质。例如，当 $\varphi\in(\mathfrak{D})_\Omega$ 时 $S(\varphi)=0$ 这一事实，說成在 Ω 上 $S=0$，記作 $S=0$ on Ω 等。如不致引起混淆，可選把 T 記作 S.

$S=0$ 这一性质，在下述的意义下，是局部性的。(i) $S=0$ on Ω 时，在 Ω 内的任意开集 U 上也有 $S=0$；这是自明的。(ii) 若在 Ω 各点的邻域有 $S=0$ 时，即

$$\text{对于各点 } x\in\Omega\text{，在 } x \text{ 的某一邻域 } U\text{，} S=0 \tag{7.1}$$

这时，則 $S=0$ on Ω；这一点須要証明。

(ii) 的証明虽然有些曲折，还是利用 Ω 上的 1 的分解 $1=\sum_i \alpha_i$ [无限項之和] 为宜。"1 的分解"常在下列条件之下考虑：

$$0\leqslant\alpha_i\in(\mathfrak{D})_\Omega,$$

$$\text{在 } \Omega \text{ 上恒等地 } \sum_i \alpha_i=1,$$

$$\sum_i \text{ 在 } \Omega \text{ 上是局部有限和。}$$

把最后条件詳細說来，就是对于各点 $x\in\Omega$，存在如下的 x 的邻域 V：

$$\left.\begin{array}{l}\text{仅取某有限个項的和 } \sum'\text{，在 } V \text{ 上} \\ \sum'\alpha_i=1 \quad [\text{其他項在 } V \text{ 上为 } 0].\end{array}\right\} \tag{7.2}$$

1 的分解对于从局部到全域的总合問題，常常成为有效的輔助手段。特別当任意給出 Ω 的开复盖：

$$\Omega\subset\bigcup U\text{，各 } U \text{ 都是开集}$$

时，能够作出这样的分解 $1=\sum_i\alpha_i$，使得各 α_i 分別属于某 $(\mathfrak{D})_U$——即 $\mathrm{Car}(\alpha_i)$ 含于某 U (証明从略)[1]。这个分解叫做依从这个复盖的分解。

考虑由(7.1)之 U 所成的 Ω 的复盖，利用依从这个复盖的分解来証明 $S=0$ on Ω。設 $\varphi\in(\mathfrak{D})_\Omega$，求証 $S(\varphi)=0$。因为 $K=\mathrm{Car}(\varphi)$

[1] 参看 И. М. Гельфанд и Г. Е. Шилов: Обобщенные функции и действия над ними, 第一章附录 1。——校者注

是有界閉集 $\subset\Omega$，从而可由有限个如(7.2)中的 V 所复盖。把对应于这有限个 V 的 $\sum'$ 中的項集中起来，再次得一有限和，于是

$$\text{在 } K \text{ 上，} \sum' \alpha_i = 1 \quad [\text{其他项在 } K \text{ 上为 } 0]. \tag{7.3}$$

即 $\varphi=\sum'\alpha_i\varphi$，因为这是有限和，所以反复利用 S 是綫性的这一性質，就能得到

$$S(\varphi)=\sum' S(\alpha_i\varphi).$$

另一方面，$\text{Car}(\alpha_i\varphi)\subset\text{Car}(\alpha_i)\subset$ 某 U，因而 $\alpha_i\varphi\in(\mathfrak{D})_U$，于是 $S(\alpha_i\varphi)=0$。由此即知 $S(\varphi)=0$。 証毕

关系式 $S=T$ 也是局部性的。又如，对于实值的 φ，$S(\varphi)$ 是实数，或是，当 $\varphi\geqslant 0$ 时恒有 $S(\varphi)\geqslant 0$，这一类的性质都是局部性的；希望讀者仿照前文驗証一下。"成为广义函数"这一性质也是局部性的；和当于(i)的事项已經述明。在闡明相当于(ii)的事项之前，要注意对于任意有界閉集 $K\subset\Omega$，存在有象(7.3)那样的有限和 $\sum'$。这时，

$$S(\varphi)=\sum' S(\alpha_i\varphi)=\sum'\alpha_i S(\varphi) \quad [\varphi\in(\mathfrak{D}_K)], \tag{7.4}$$

但不参加 $\sum'$ 的項为 0，从而 $\sum'$ 可用形式上的总和 $\sum_i$ 来代替，与 K 无关地有

$$S(\varphi)=\sum_i\alpha_i S(\varphi),\ S=\sum_i\alpha_i S. \tag{7.5}$$

现在，把目的更加强化，証明一下能把局部給定的广义函数系集中成为一个：

定理 7.1 假設 $\bigcup U\supset\Omega$ 是开集 Ω 的开复盖，且已給定在各个 U 上的广义函数 S_U，但

$$\text{在 } U\cap U' \text{ 上，} S_U=S_{U'}. \tag{7.6}$$

这时存在唯一的在 Ω 上的广义函数 S，

$$\text{在各个 } U \text{ 上 } S=S_U. \tag{7.7}$$

唯一性从 $S=T$ 为局部性关系的事实可明。現在要实际給出 S。試取依从上述开复盖的 1 的分解 $1=\sum_i\alpha_i$，对于各 α_i，使包含

$\mathrm{Car}(\alpha_i)$ 的 U 中之一，$U=U_i$ 与之对应，并置 $S_i=S_{U}$。乘积

$$\alpha_i S_i:\ (\mathfrak{D})_\Omega\ni\varphi\Rightarrow S_i(\alpha_i\varphi)$$

是 Ω 上的广义函数。每指定一个 φ，除去某有限个以外的 $\alpha_i\varphi=0$，这就决定了与(7.5)同样意义的和

$$S=\sum_i\alpha_i S_i:\ S(\varphi)=\sum_i S_i(\alpha_i\varphi).$$

这个 S 就是所求的。証明如下。

S 显見是綫性的。$K\subset\Omega$ 时，在$(\mathfrak{D}_K)$上，借助(7.3)的有限和，$S=\sum'\alpha_i S_i$，因之 S 随同 $\alpha_i S_i$ 而連續。从而 S 是 Ω 上的广义函数。其次証明(7.7)。当 $\varphi\in(\mathfrak{D})_U$ 时，由于 $\mathrm{Car}(\alpha_i\varphi)$ 含于 U 中又含于 U_i 中，于是含于 $U\cap U_i$ 之中，因此根据(7.6)得出 $S_U(\alpha_i\varphi)=S_i(\alpha_i\varphi)$，由此得到

$$S_U(\varphi)=\sum_i S_U(\alpha_i\varphi)=\sum_i S_i(\alpha_i\varphi)=S(\varphi).$$

"成为測度"这一性质同样是局部性的。

C^∞ 流形❶上的广义函数 以上述的局部性作为論据，不仅限于 $X=R^n$ 的情形，在一般的 C^∞ 流形 X 上也能考虑'广义函数'及'測度'。首先把'有界集'改成为'閉包为紧緻的集'，对于紧緻集 $K\subset X$ 与前同样定义$(\mathfrak{D}_K)$，对于开集 $\Omega\subset X$，置

$$(\mathfrak{D})_\Omega=\bigcup_{K\subset\Omega}(\mathfrak{D}_K),\quad(\mathfrak{D})=(\mathfrak{D})_X.$$

还要注意，一点 $x\in X$ 的坐标邻域可以认为是 R^n 的开集。这样，当$(\mathfrak{D})$上的泛函 S 在 X 各点的坐标邻域成为广义函数时，就說 S 是 X 上的广义函数。測度的定义亦同。

在这种情况下，測度也是广义函数的一种。然而，所以能把連續函数視为广义函数的一种，是仅限于在整个 X 全域上能規定一种体元素 dx 的时候；这时局部可积函数也是測度的一种，从而成为广义函数的一种。当 X 作为某 Euclid 空間的 C^∞ 子流形而給出时，这样的 dx 就存在；例如 X 若是曲面，dx 就是普通的面元素！又当 X 是 n 維环面 T^n 时，也是如此。T^n 乃是把 R^n 中的具

❶ 可参看如本丛书岩堀长庆著《Lie 群論》。

有整数差的坐标的点看作同一点而得到的。例如 $X=T^2$，即在图7.1中认为 $A=B$，$C=D$，而 $\int_X f\,dx$ 就是沿着图中正方形上的普通积分。

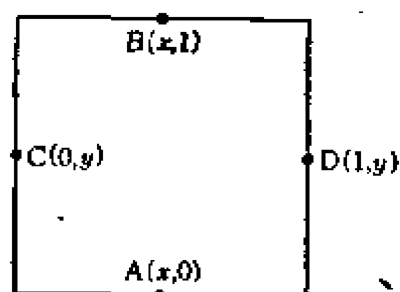


图 7.1

在本书中，如不特别申明，广义函数都是指在 $X=R^n$ 上或是在 R^n 的开集上的。但要注意，在 T^n 上的广义函数的理論尽管已显著地单純化了，但仍可照样进行。

广义函数的支集 如說点 x 属于連續函数 f 的支集，就等于說"不論在 x 的任何邻域內，f 也不恒等于0"。关于一般的广义函数 S，使得

不論在 x 的怎样邻域，也不得 $S=0$

这样的点 x 的全体叫做 S 的支集 $\mathrm{Car}(S)$。其外的点，即

在 x 的某邻域 U，$S=0$

这样的点 x 的全体設为 $\mathrm{O}(S)$。要注意性质 $S=0$ 是局部性的。这个 U 的各点又都属于 $\mathrm{O}(S)$。从而 $\mathrm{O}(S)$ 是开集，

$$\text{在 } \mathrm{O}(S), S=0; \tag{7.8}$$

$$\text{在开集 } \Omega\text{，若 } S=0 \text{ 則 } \Omega\subset \mathrm{O}(S). \tag{7.9}$$

因为整个空間分解为 $\mathrm{O}(S)$ 及 $\mathrm{Car}(S)$，所以

定理 7.2 (i) $\mathrm{Car}(S)$ 是閉集，在其外部 $S=0$[(7.8)]。(ii) 若在閉集 E 的外部 $S=0$，則 $\mathrm{Car}(S)\subset E$[(7.9)]。(iii) 若在 $\mathrm{Car}(S)$ 的邻域 $\varphi=\psi$，則 $S(\varphi)=S(\psi)$。

关于(iii)，由假定可知 $\mathrm{Car}(\varphi-\psi)\subset \mathrm{O}(S)$，于是 $S(\varphi-\psi)=0$。从(ii)得出

$$\mathrm{Car}(D^pS)\subset \mathrm{Car}(S), \tag{7.10}$$

$$\mathrm{Car}(S+T)\subset \mathrm{Car}(S)\cup \mathrm{Car}(T), \tag{7.11}$$

$$\operatorname{Car}(\alpha S) \subset \operatorname{Car}(\alpha) \cap \operatorname{Car}(S); \tag{7.12}$$

这里面的 $\cup$ 表示并集，$\cap$ 表示交集；还有

$$\operatorname{Car}(\sigma S) = -\operatorname{Car}(S), \tag{7.13}$$

$$\operatorname{Car}(\tau_a S) = \operatorname{Car}(S) + a, \tag{7.14}$$

$$\operatorname{Car}(\varphi * S) \subset \operatorname{Car}(\varphi) + \operatorname{Car}(S), \tag{7.15}$$

但对于 $A \subset X$，$B \subset X$，

$$-A = \{-x;\ x \in A\},$$

$$A + B = \{x + y;\ x \in A,\ y \in B\}.$$

例 7.1 $D^p\delta$ 的支集是原点。Heaviside 函数 Y 的支集是从原点（包含在内）伸向 $+\infty$ 的半直线。

第2章 关于拓扑的考察

为了准备强有力的理論，就需要关于收斂或連續性的尺度。我們曾取向量之长作为 R^n 的尺度。对于函数的向量空間以及广义函数的向量空間，則有各种各样的長度。那都是拟范数系，由此能决定邻域系，从而也就能决定其拓扑結构。这样就能由 R^n 自然而又灵活地导出一些类似的推論。邻域系的定义虽然有些复杂，但要了解这是为保証安全与灵活地进行推导所必需的过程。§4 中的单純收斂可用較强的收斂代替，但是为了保証这一点，只有經过对拓扑結构的詳細考察，才能得到强有力的收斂定理。

§8 拟范数系，$(\mathfrak{D}_K)$的拓扑結构

$X=R^n$ 上的有界函数的全体构成一个向量空間，对各有界函数 f，使实数 $\rho(f)=\|f\|_\infty$ 与之对应，泛函 ρ 就形成这个空間的一种范数，即

$$0\leqslant\rho(f),\ \rho(af)=|a|\cdot\rho(f),\ \rho(f+g)\leqslant\rho(f)+\rho(g),\quad(8.1)$$

$$\rho(f)=0\text{ 时 }f=0.\quad(8.2)$$

从而，能把 $\operatorname{dis}(f,g)=\rho(f-g)$ 看作 f 与 g 的"距离"：

$$\left.\begin{aligned}&0\leqslant\operatorname{dis}(f,g)=\operatorname{dis}(g,f)<\infty,\\&\operatorname{dis}(f,f)=0,\\&\operatorname{dis}(f,h)\leqslant\operatorname{dis}(f,g)+\operatorname{dis}(g,h),\end{aligned}\right\}\quad(8.1')$$

$$\operatorname{dis}(f,g)=0\text{ 时 }f=g.\quad(8.2')$$

一般，不問 (8.2)，只要某空間 (A) 上的泛函 ρ 适合条件 (8.1)——即对任意元素 f,g 及任意系数 a 恒成立——，就称 ρ 为 (A) 上的拟范数(semi-norm)。这时 $\operatorname{dis}(f,g)=\rho(f-g)$ 在(8.1')

的意义下成为"广义的距离"。譬如，給定(A)上的綫性泛函S，由此規定的泛函

$$\rho_S\colon\ \rho_S(f)=|S(f)|\quad[f\in(A)]\tag{8.3}$$

就是(A)上的拟范数。(A)的維数若$\geqslant 2$，ρ_S就不是范数。$(\mathfrak{D}_K)$上的泛函

$$\rho^p\colon\ \rho^p(\varphi)=\|D^p\varphi\|_\infty\quad[\varphi\in(\mathfrak{D}_K)]\tag{8.4}$$

明显地是拟范数，其实它同时也是范数：

例如就$D^p=\dfrac{\partial}{\partial x_i}$来設，若$\rho^p(\varphi)=0$，则$\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_i}=0$，将此作$\mathrm{Car}(\varphi)$之外的不定积分$\int\cdots dx_i$卽得$\varphi=0$。对于一般的$D^p$，反复施行，使之还原于$\varphi$卽可。

对于$(\mathfrak{D}_K)$，形如ρ^p的范数[p：任意]都叫做基本范数。基本范数的全体記作(N)。于是固有收斂$\varphi_j\to\varphi$ in $(\mathfrak{D}_K)$是

$$\text{对于各}\ \rho\in(N),\ \rho(\varphi_j-\varphi)\to 0.\tag{8.5}$$

这也可用某一种的距离表示：

$$\mathrm{dis}(\varphi_j,\varphi)\to 0.\tag{8.6}$$

为此，首先对$\rho\in(N)$使数$a_\rho>0$与之对应，并設总和$\sum a_\rho<\infty$；因为規定$\rho=\rho^p$的p是$\geqslant 0$的整数組，所以实质上是在考虑多重級数。然后規定如下：

$$\mathrm{dis}_\rho(\varphi,\psi)=\frac{\rho(\varphi-\psi)}{1+\rho(\varphi-\psi)},\tag{8.7}$$

$$\mathrm{dis}(\varphi,\psi)=\sum a_\rho\,\mathrm{dis}_\rho(\varphi,\psi).\tag{8.8}$$

对于$t\geqslant 0$，函数$\dfrac{t}{1+t}$是上凸的❶，所以与$\rho(\varphi-\psi)$同时(8.7)，(8.8)也都是距离。当(8.6)成立时，(8.5)自然成立。又从$\sum$适当地舍弃有限个項，就能使剩余項的和$\sum' a_\rho$充分小，与此同时

$$\sum{}' a_\rho\,\mathrm{dis}_\rho(\varphi_j,\psi)<\sum{}' a_\rho$$

❶ 这是指当$t,s\geqslant 0$时，$\dfrac{t}{1+t}+\dfrac{s}{1+s}\geqslant\dfrac{t+s}{1+t+s}$。——校者注

的左端也充分小；这样从(8.5)就能导致(8.6)。

对于这个距离，取 φ 的 ε 邻域为

$$U_\varepsilon(\varphi)=\{\psi;\ \mathrm{dis}(\varphi,\psi)<\varepsilon\}\quad[\varepsilon>0],$$

这样就能說：(8.6)是关于这个邻域系 $\{U_\varepsilon(\varphi);\ \varepsilon>0\}$ 的收斂关系。所謂关于某邻域系 $\{V(\varphi)\}$ 的收斂 $\varphi_j\to\varphi$，就是

$$\text{对于 }\varphi\text{ 的各邻域 }V(\varphi)\text{，終于成为 }\varphi_j\in V(\varphi). \tag{8.9}$$

即使收斂系 φ_j 的下标 j 不是自然数时，只要使得关于收斂的考察順利进行即可❶。如 U_ε 另外可表为下列形状的集 $V(\varphi)=V(\varphi;F,\varepsilon)$，它們都是[使 F，ε 变动] φ 的邻域，則(8.5)与(8.9)相一致可以直接証明：

$$\left.\begin{array}{l} V(\varphi;F,\varepsilon)=\{\psi;\ \max\limits_{\rho\in F}\rho(\varphi-\psi)<\varepsilon\}, \\ F\text{ 是有限集 }\subset(N),\ \varepsilon>0. \end{array}\right\} \tag{8.10}$$

如同(8.5)与(8.6)相一致的証明[(8.8)以下的小型字]那样，也可說明

$$\left.\begin{array}{l} \text{各 }V(\varphi;F,\varepsilon)\text{都包含着某 }U_\eta(\varphi), \\ \text{各 }U_\eta(\varphi)\text{都包含着某 }V(\varphi;F,\varepsilon). \end{array}\right\} \tag{8.11}$$

現在就前半詳細說明一下。对于給定的 F 及 ε，把 η 取得充分小，就能使 $U_\eta(\varphi)\subset V(\varphi;F,\varepsilon)$。这个(8.11)就說明了，这样两种的邻域系規定同一的拓扑。这种拓扑叫做 $(\mathfrak{D}_K)$ 的**固有拓扑**。

在更一般的情況下也能考虑(8.10)的邻域系 $\{V(\varphi)\}$。就是当指定某向量空間 (A)，以及在 (A) 上的某一拟范数的集 (N) 时，用(8.5)就能定义在 (A) 上的收斂 $\varphi_j\to\varphi$ 的情形。这种情形的收

---

❶ 象"終于"这样的副詞是有其意义的，假如若干个命題都終于成立的話，它們就一致地成立。举例如下：

終于 C 成立，　　終于 C' 成立，

于是，終于 C 及 C' 同时成立。

这里的 C, C' 表示与 j 相关的条件❷。

❷ 关于这种"定向列"的收斂的討論，参看关肇直：《拓扑空間概論》。——校者注

斂也能轉变为(8.9)。另一方面，这种收斂具有如下的方便性质：关于这种收斂与系数的普通收斂，有

$$\text{对应}(\varphi,\ \psi)\Rightarrow\varphi+\psi,\ (a,\ \varphi)\Rightarrow a\varphi\ \text{連續。} \tag{8.12}$$

就是說，

$$\varphi_j\to\varphi,\ \psi_j\to\psi\ \text{时}\ \varphi_j+\psi_j\to\varphi+\psi,$$

$$a_j\to a,\ \varphi_j\to\varphi\ \text{时}\ a_j\varphi_j\to a\varphi.$$

进一步，把代替(8.2)的条件設为

$$\left.\begin{array}{l}\text{如果}\ \varphi\in(A)\ \text{不是原点}\ 0,\\ \text{对于某}\ \rho\in(N)\ \text{就有}\ \rho(\varphi)>0,\end{array}\right\} \tag{8.13}$$

这样，极限的唯一性也能保証：$\varphi_j\to\varphi$ 而且 $\varphi_j\to\psi$，則 $\varphi=\psi$.

例 8.1 函数的单純收斂 $f_j\to f$ [在各点 x，$f_j(x)\to f(x)$] 也能利用形如 $\rho_x(f)=|f(x)|$ 的拟范数 ρ_x 如上地表示。广义函数的单純收斂也是一样：把 x 换为 $\varphi\in(\mathfrak{D})$. 但在这种情况下，拟范数过多，不能象(8.6)那样采取唯一的距离。

注意 8.1 显見$(\mathfrak{D})$伪收斂也具有性质(8.2)与极限的唯一性，但是，象上面那样，用$(\mathfrak{D})$上的拟范数的集将其統一地表达出来則不可能。

一般情况的邻域系，在条件(8.13)之下，因其适合 Hausdorff 的邻域公理，所以使得平常的推理能充分进行。例如相当于分离公理的是(8.13)。又如为驗証这样一个公理：

二邻域 $V(\varphi)$，$V'(\varphi)$ 的共同部分 $V(\varphi)\cap V'(\varphi)$，

包含着某邻域 $V''(\varphi)$，

只要对于

$$V(\varphi)=V(\varphi;\ F,\ \varepsilon),\quad V'(\varphi)=V(\varphi;\ G,\ \eta)$$

定义下列的邻域即可：

$$V''(\varphi)=V(\varphi;\ F\cup G,\ \min(\varepsilon,\ \eta)).$$

由这个公理就可看出，邻域的形式不限于 $V(\varphi;\rho,\varepsilon)=\{\psi;\ \rho(\varphi-\psi)<\varepsilon\}$，甚至可用到有限集 F. 至于其他公理的驗証，則留

給讀者。

借助这种邻域系所規定的拓扑叫做依据拟范数系 (N) 的拓扑，各个 $\rho\in(N)$ 叫做这个拓扑的基本拟范数。如(8.12)那样的連續性，也容易轉换到邻域系。显然，各个邻域 $V(\varphi)$ 都是**凸集**，就是說，联結 $V(\varphi)$ 任意两点 ψ，ω 的綫段

$$\{t\psi+(1-t)\omega;\ 0\leqslant t\leqslant 1\}$$

仍然含于 $V(\varphi)$ 内。于是，依据拟范数系的拓扑，以及伴随这种拓扑的向量空間都叫做**局部凸的**。今后，凡不特別申明，对于局部凸空間的基本拟范数系就設定其分离性(8.13)。这种条件在各个实例中比較明显，故不一一驗証。

作为特殊情况，如$(\mathfrak{D}_K)$那样，有

定理 8.1　依据至多为可数的拟范数系的拓扑，借助(8.8)，就能使空間"距离化"[在(8.11)的意义下]❶。

如同(8.9)前后那样，可以广义地选取收斂系，因而关于拓扑考察的大部分，与其利用邻域，毋宁利用輕便的收斂处理为宜。例如，就二种拓扑，不作(8.11)那样的比較，却观察其收斂概念是否一致即可。还有，观察 S 在点 φ 的連續性时，就考虑

$$\varphi_j\to\varphi \text{ 时 } S(\varphi_j)\to S(\varphi),$$

这与通常就邻域系考虑是一样的。

定理 8.2 [判定准則(6.7)，(6.8)的一般化]　設 S 是局部凸空間 (A) 上的綫性泛函或是[不限于'基本的']拟范数，并設 φ 是 (A) 的一点，这时下列条件(i)～(iv)彼此等价。

(i) S 于原点 0 連續。

(ii) S 于点 φ 連續。

(iii) S 于 φ 的某邻域有界：

$$|S(\psi)|\leqslant c=\text{const}\quad[\psi\in [illegible]].$$

❶ 在(8.7)不能保証分离性(8.2′)，但在(8.8)則能保証。

(iv) S 被某有限个基本范数 $\rho_i[i=1, \cdots, m]$所“控制”❶：对于某定数 a，

$$|S(\psi)| \leqslant a \cdot \max_i \rho_i(\psi) \quad [\psi \in (A)].$$

从而各个条件給出了 S 在全空間的連續性[因(ii)中的 φ 可移于任何处]。

証明 不管是綫性泛函，还是拟范数，显有

$$|S(\psi)-S(\varphi)| \leqslant |S(\varphi-\psi)| = |S(\psi-\varphi)|, \quad S(0)=0.$$

于是，(i)成立时(ii)即明。(ii)成立时当然有(iii)。(iii)成立时，将其中的 V 設为

$$V=V(\varphi;\ F, \varepsilon), \quad F=\{\rho_1, \cdots, \rho_m\},$$

对于 $\psi \in V(0;\ F, \varepsilon)$ 则有 $|S(\psi)| \leqslant c+|S(\varphi)|$❷，因之如取比右端較大的 $c'>0$，再置 $a=\frac{c'}{\varepsilon}$ 就得到(iv)。(iv)成立时(i)即明。

在局部凸空間，下列各款十分明显。

系 1 基本拟范数連續。

系 2 綫性泛函及拟范数系，若被有限个連續拟范数所控制，則連續。

系 3 特别当 S 是綫性泛函时，$\rho_S[(8.3)]$的連續性与 S 的連續性是等价的。

这些判定准則举例来說能利用如下。若給定广义函数 S，当 φ_j 向 0，$(\mathfrak{D})$ 伪收斂[§4]时，卷积

$$S*\varphi_j(x)=S(\tau_x \sigma \varphi_j) \quad [参看 §4],$$

当然，每逢固定了 x 就有 $S*\varphi_j(x) \to 0$，其实——此处借用(iv)——这个收斂是**广义地一致**，就是說，若任意指定有界集❸ E，就有

$$在\ E\ 上一致地\ S*\varphi_j(x) \to 0.$$

❶ 作为便宜的語詞而导入。要注意任意系数 a 的存在。

❷ 此处当作 $|S(\psi)| \leqslant c$，因为 $\varphi=0$。——校者注

❸ 限于有界閉集也是同样。

所要証明的就是,取与 x 无关的 $\varepsilon_j\to 0$,

$$\text{对于一切的 } x\in E,\ |S*\varphi_j(x)|\leqslant \varepsilon_j.$$

設 $\varphi_j\to 0$ in $(\mathfrak{D}_K)$。当 φ 遍历 $(\mathfrak{D}_K)$, x 遍历集 E 时, $\tau_x\sigma\varphi$ 则进入某一确定的 $(\mathfrak{D}_H)$ 之内:这是因为在有界集

$$E-K=\{x-y;\quad x\in E, y\in K\}$$

之外, $\tau_x\sigma\varphi$ 全都为 0 的緣故。广义函数 S 在 $(\mathfrak{D}_H)$ 上的連續性如写成(iv)的形状,对于确定的某有限个 p, 可得

$$|S(\psi)|\leqslant a\cdot\max_p\|D^p\psi\|_\infty\qquad[\psi\in(\mathfrak{D}_H)].$$

因 max 内的各项对于平移或反轉都是不变的,所以

$$|S(\tau_x\sigma\varphi)|\leqslant a\cdot\max_p\|D^p\varphi\|_\infty\qquad[\varphi\in(\mathfrak{D}_K), x\in E].$$

最后把 φ_j 代入 φ, 設其右端为 ε_j 即可。 証毕

当 $(\mathfrak{D})$ 伪收斂 $\varphi_j\to\varphi$ 的时候, $S*\varphi_j(x)$ 向 $S*\varphi(x)$ 广义地一致收斂。然而, $S*\varphi$ 是 C^∞ 級的函数,使 $D^pS*\varphi$ 的 D^p 作用于 S 也罢,作用于 $S*\varphi$ 也罢,都无妨碍。因为 D^pS 也是广义函数,所以

$$\left.\begin{array}{l}\text{若 }\varphi_j\text{ 向 }\varphi,(\mathfrak{D})\text{ 伪收斂,则对于各 }p,\\ \text{广义一致地 }D^pS*\varphi_j(x)\to D^pS*\varphi(x).\end{array}\right\}\qquad(8.14)$$

与此关联,試用拟范数系表达連續函数的广义一致收斂。

$X=R^n$ 上的連續函数的全体設为 $(\mathfrak{C}^0)$, 于 $(\mathfrak{C}^0)$, 考虑由 X 的有界閉集 K 所决定的

$$\rho_K:\ \rho_K(\psi)=\max_{x\in K}|\psi(x)|$$

[使 K 变动则得种种 ρ_K], 将其全体作为基本拟范数。因为 K 上的一致收斂 $\psi_j\to\psi$ 可以表为 $\rho_K(\psi_j-\psi)\to 0$, 所以广义一致收斂不过是依据 $(\mathfrak{C}^0)$ 的基本拟范数系的收斂;請参照紧前的脚注。簡化拟范数系,使 K 限于

$$K_\nu=\{x;\ |x|\leqslant\nu\}\quad[\nu=1,2,\cdots]$$

的形状,也能同样地把广义一致收斂表达出来。

注意 8.2 K 恰好成为空集时，上述 max 就失掉了意义。然而关于恒为 $g(x)\geqslant 0$ 的 $g(x)$，在空范圍就約定其 $\max g(x)$，$\sup g(x)$ 为 0。这种約定是为防备空集的出現，几乎沒有什么积极作用。

X 上 C^∞ 級函数的全体設为 $(\mathfrak{E})$，于此把

$$\rho_K^p:\ \rho_K^p(\psi)=\rho_K(D^p\psi)=\max_{x\in K}|D^p\psi(x)|$$

作为基本拟范数系的一般形。(8.14)的結果就是关于这种拟范数系的收斂 $S*\varphi_j\to S*\varphi$。在 $(\mathfrak{E})$，即使把 K 限于前見的 K_ν 的形状，也不影响其收斂的意义，从而拓扑亦无所变。由此可見，根据定理 8.1

$(\mathfrak{E})$，$(\mathfrak{E}^0)$ 可以距离化。

于此所規定的两空間的拓扑叫做 $(\mathfrak{E})$，$(\mathfrak{E}^0)$ 的固有拓扑，以后有时要用到。

例 8.2 $\alpha\in(\mathfrak{D})$ 时，对于 $|x|\to\infty$，

$$\tau_x\alpha\to 0\ \text{in}\ (\mathfrak{E}),\quad \tau_x\alpha\to 0\ \text{in}\ (\mathfrak{E}^0).$$

对一般的 $\alpha\in(\mathfrak{E})$，不能保証这样的收斂。

§9 $(\mathfrak{D})$的局部凸拓扑結构

在 $(\mathfrak{D})$ 的伪收斂概念，同依据 $(\mathfrak{D})$ 的任何拓扑的收斂概念不完全一致(說明从略)[1]。然而，若把与伪收斂密切关联的局部凸拓扑定义之后，就能使两者按照方便来使用。这种方法在 $(\mathfrak{D})$ 以外的函数空間也时常适用。作为一例，兹举 (C)。(C) 伪收斂 $\varphi_j\to\varphi$ 的意义是，在某 (C_K)，$\varphi_j\to\varphi$。(C_K) 的固有收斂仅能从唯一的一种基本范数 $\rho(\varphi)=\|\varphi\|_\infty$ 給出。命此为固有拓扑。

現在，要求 $(\mathfrak{D})$ 的拓扑具有如下的性质：关于該拓扑的連續泛函針对伪收斂說也連續，更一般地，

---

[1] 見关肇直：《拓扑空間概論》，274 頁(第八章 §1 的例 4)。——校者注

$$\left.\begin{array}{l}\text{由}(\mathfrak{D})\text{到任一拓扑空間}(A)\text{的[关于}(\mathfrak{D})\text{的拓扑]}\\ \text{連續映象 }S\text{，关于}(\mathfrak{D})\text{伪收斂也連續：}\\ \text{当}(\mathfrak{D})\text{伪收斂 }\varphi_j\to\varphi\text{ 时，在}(A)\text{上 }S(\varphi_j)\to S(\varphi)\text{.}\end{array}\right\}\quad(9.1)$$

于此仅要求

$$\left.\begin{array}{l}\text{当}(\mathfrak{D})\text{伪收斂 }\varphi_j\to\varphi\text{ 时，关于}(\mathfrak{D})\text{的拓扑也有 }\varphi_j\to\varphi\\ \text{[即对}(\mathfrak{D})\text{的各基本拟范数 }\rho\text{，}\rho(\varphi_j-\varphi)\to 0\text{].}\end{array}\right\}\quad(9.2)$$

这样，所考虑的 ρ 只要关于伪收斂連續就可以。另一方面，还为了使"該拓扑难以导致伪收斂以外的收斂"起見，尽量多地采用 ρ 即可。

为此，把$(\mathfrak{D})$上的，关于$(\mathfrak{D})$伪收斂——即在各$(\mathfrak{D}_K)$上——連續的拟范数全都作为$(\mathfrak{D})$的基本拟范數。例如，

$$\rho^p:\ \rho^p(\varphi)=\|D^p\varphi\|_\infty\quad[\varphi\in(\mathfrak{D})]$$

就是$(\mathfrak{D})$的基本拟范数。又如依据广义函数 S 的

$$\rho_S:\ \rho_S(\varphi)=|S(\varphi)|$$

也是如此；把定理 8.2 系 3 試用于各 $(\mathfrak{D}_K)$ 即可。这种拓扑称为$(\mathfrak{D})$的固有拓扑，簡称为$(\mathfrak{D})$拓扑。在$(\mathfrak{D})$，如不特別申明，**連續性，收斂等都是关于固有拓扑而言的**，然于必要时[特别有后面(9.5)的情況]依据$(\mathfrak{D})$拓扑的术語，在記号上都附加 in$(\mathfrak{D})$；在其他空間，关于"固有拓扑"也这样处理。

作为(9.1)的特款，

$$(\mathfrak{D})\text{上的連續綫性泛函是广义函数。}\qquad(9.3)$$

然而，其逆理也成立：因为基本拟范数連續[定理 8.2 系 1]，所以若把定理 8.2 系 3 用于$(\mathfrak{D})$及前見的 ρ_S，即知

$$\text{广义函数是}(\mathfrak{D})\text{上的連續綫性泛函。}\qquad(9.4)$$

(9.1)的一般逆理虽不成立，但能把(9.4)作某种程度的扩充。且設由$(\mathfrak{D})$到局部凸空間(A)的映象 $\varphi\Rightarrow S(\varphi)$为綫性：

$$S(a\varphi+b\psi)=a\cdot S(\varphi)+b\cdot S(\psi)$$

$$[\text{从而,特别有 } S(0)=0],$$

并且关于$(\mathfrak{D})$伪收斂連續。对于前見的 ρ_S，試用(A)的一个基本拟范数 ρ 代替其中的絕对値，置

$$\rho'(\varphi)=\rho(S(\varphi)) \quad [\varphi\in(\mathfrak{D})].$$

显然，ρ' 就成为$(\mathfrak{D})$的基本拟范数[之一]。因之，当 $\varphi_j\to\varphi$ in $(\mathfrak{D})$ 时，对于(A)的各基本拟范数 ρ，有

$$\rho(S(\varphi_j)-S(\varphi))=\rho(S(\varphi_j-\varphi))=\rho'(\varphi_j-\varphi)\to 0,$$

从而 $S(\varphi_j)\to S(\varphi)$ in (A)。这样就得到

定理 9.1 由$(\mathfrak{D})$到局部凸空間的綫性映象，若关于$(\mathfrak{D})$的伪收斂連續，則关于$(\mathfrak{D})$的拓扑也連續[(9.1)的部分逆定理]。

还应注意，綫性映象的連續性，不論是关于伪收斂，还是关于拓扑，必然归結到在原点的連續性[即 $\varphi_j\to 0$ 的情况]。

例 9.1 如果 φ_j 向 0，$(\mathfrak{D})$伪收斂，則 $D^p\varphi$ 也向 0，$(\mathfrak{D})$伪收斂，从而向 0 收斂。因此，綫性映象

$$(\mathfrak{D})\ni\varphi\Rightarrow D^p\varphi\in(\mathfrak{D})$$

連續。同样可知，連續性既知的綫性映象中还有以下的一些，反轉 σ 与平移 τ_x：

$$(\mathfrak{D})\ni\varphi\Rightarrow\sigma\varphi\in(\mathfrak{D}), \quad (\mathfrak{D})\ni\varphi\Rightarrow\tau_x\varphi\in(\mathfrak{D}) \quad [x\text{ 确定}]。$$

同 C^∞ 級函数 α 的乘积[关于伪收斂的連續性已見于 §3]

$$(\mathfrak{D})\ni\varphi\Rightarrow\alpha\varphi\in(\mathfrak{D}).$$

同广义函数的卷积[参看(8.14)]

$$(\mathfrak{D})\ni\varphi\Rightarrow S*\varphi\in(\mathfrak{E}).$$

同支集为有界的广义函数的卷积

$$(\mathfrak{D})\ni\varphi\Rightarrow S*\varphi\in(\mathfrak{D}) \quad [S\text{ 的支集有界}]。$$

于此，当 $\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$ 时，由 §7 末尾的公式可知

$$\mathrm{Car}(S*\varphi)\subset\mathrm{Car}(S)+K,$$

因其右端是一确定的有界閉集，所以 $S*\varphi\in(\mathfrak{D})$，同时关于伪收斂的連續性也明确了[(8.14)]。

作为(9.2)的部分的逆定理，

$$\left.\begin{array}{l}\text{若 } \varphi_j \text{ 皆属于同一的}(\mathfrak{D}_K)\text{而 } \varphi_j\to\varphi \text{ in}(\mathfrak{D}),\\ \text{那末实际是 } \varphi_j\to\varphi \text{ in}(\mathfrak{D}_K).\end{array}\right\} \tag{9.5}$$

事实上,因 ρ^p 是$(\mathfrak{D})$的基本拟范数,所以 $\rho^p(\varphi_j-\varphi)\to 0$,特别从对应0阶 D^p 的 $\|\varphi_j-\varphi\|_\infty\to 0$ 可知 $\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$[因在 K 外 $\varphi_j(x)=0$,故 $\varphi(x)=0$],上面一般的 $\rho^p(\varphi_j-\varphi)\to 0$ 是关于 $(\mathfrak{D}_K)$ 拓扑的收斂。

結合(9.5)与(9.2),对固定了的$(\mathfrak{D}_K)$,$(\mathfrak{D}_K)$拓扑的收斂与$(\mathfrak{D})$拓扑的收斂是等价的。这也可叙述为:

定理9.2 对$(\mathfrak{D}_K)$,$(\mathfrak{D}_K)$拓扑与$(\mathfrak{D})$拓扑一致。

特别,序列 φ_j——即 j 是自然数而 $\to\infty$ 的情况——的收斂也受 ρ^p 以外的基本拟范数的影响,

定理9.3 $(\mathfrak{D})$的收斂序列 $\varphi_j\to\varphi$,是含于某一$(\mathfrak{D}_K)$,从而向 φ 伪收斂。

为了闡明这个事实,要注意对于$(\mathfrak{D})$的各基本范数 ρ 皆有 $\rho(\varphi_j)\to\rho(\varphi)$,于是数列 $\rho(\varphi_j)$ 有界。但上界因 ρ 的取法可能有所不同。且如不是序列就不能保証其有界性。然而存在有如下的 ρ:

$$\rho(\psi)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k|\psi(x_k)|\quad[\psi\in(\mathfrak{D})].$$

这里假設 x_k 是趋向无限远的点列:$|x_k|\to\infty$,而系数列 a_k 皆 ≥ 0。

为檢驗这个 ρ 是基本拟范数,如注意到它在各$(\mathfrak{D}_K)$上都是确定的有限个項[对应 $x_k\in K$]的和即可。或者看做是依据某离散測度 S[例6.2]的 ρ_S 亦可。

所要証明的定理包含于更一般的情况:

定理9.4 設 M 是一个集 $\subset(\mathfrak{D})$,并設$(\mathfrak{D})$的各基本拟范数 ρ 都在 M 上有界:

$$\sup_{\varphi\in M}\rho(\varphi)<\infty. \tag{9.6}$$

这时,M 必含于某$(\mathfrak{D}_K)$中。

証明 如下之点 x 的全体設为 E:

至少有一 $\varphi\in M$ 在該点 $\varphi(x)\neq 0$。

假如这个 E 不是有界集。E 必含有趋向无限远的点列 x_k，于各 x_k 有某 $\varphi_k\in M$，$\neq 0$；这样，試用系数序列

$$a_k=\frac{k}{|\varphi_k(x_k)|}\quad [k=1,2,\cdots]$$

作成前見的 ρ，就有

$$\rho(\varphi_k)\geqslant k\quad [k=1,2,\cdots],$$

是与(9.6)矛盾。因此，E 确是有界集，在其閉包 $K=\overline{E}$ 之外，一切 $\varphi\in M$ 都成为 0。 証毕

設 j 是实値参数[或者說是确定了的有限組]，即使考虑 j 趋近于某値 c 时的 $\varphi_j\to\varphi$，也有相当于定理 9.3 的性质。对于充分接近 c 的 j，φ_j 都进入同一的$(\mathfrak{D}_K)$之内。不妨設 $c=\pm\infty$。将收斂序列的特性轉化于这种情况大致是容易的，所以今后主要讲述收斂序列及完全一般的收斂系。

例 9.2 与例 8.2 相反，$\alpha\in(\mathfrak{D})$ 时，对于 $|x|\to\infty$ 不必有 $\tau_x\alpha\to 0$ in $(\mathfrak{D})$。如果实現，則限于 $\alpha=0$ 的情形。

函数空間(C)的固有拓扑也能同样定义。各定理也照样——但把$(\mathfrak{D}_K)$改写为(C_K)——成立。相当于(9.3)，(9.4)的是，关于測度成立。又对于开集 $\Omega\subset X$ 作局部化，再考虑$(\mathfrak{D})_\Omega$或是$(C)_\Omega$，結果也是一样。

§10 共軛空間的代数关系

局部凸空間(A)上連續綫性泛函的全体，依照普通的运算[参看注意 2.1]，形成一个向量空間，称为与(A)共軛的(conjugate, dual)空間$(A)'$。特别，$(\mathfrak{D})$的共軛空間$(\mathfrak{D})'$是广义函数的全体：(9.3),(9.4)。又$(C)'$是測度的全体。根据 §6 的約定$(C)'\overset{*}{\subset}(\mathfrak{D})'$，

該处的討論可以看做是依据伪收斂而进行的。逐步地，将此轉化于拓扑，并观察其一般性。

今于$(\mathfrak{D})$比較其拓扑，$(\mathfrak{D})$拓扑"强"于(C)拓扑，就是說，$\varphi_j \to \varphi$ in $(\mathfrak{D})$时必有 $\varphi_j \to \varphi$ in (C)。

証明 伪收斂具有这样的强弱。由此可見，(C)的基本拟范数[关于(C)伪收斂性連續]，如就$(\mathfrak{D})$上考虑則成为$(\mathfrak{D})$的基本拟范数。从而，$\varphi_j \to \varphi$ in $(\mathfrak{D})$时，对于(C)的各种基本拟范数ρ，$\rho(\varphi_j \dot{-} \varphi) \to 0$。 証毕

更一般地，考虑局部凸空間(A)是局部凸空間(B)的子向量空間的情形——簡記为"代数性的$(A) \subset (B)$"——等。如果

$$\left.\begin{array}{l}(B)\text{的各基本拟范数}\ \rho\ \text{在}\ (A)\\ \text{上[关于}\ (A)\ \text{拓扑]也是連續}\end{array}\right\} \tag{10.1}$$

的話，則(A)拓扑强于(B)拓扑。逆定理显然成立。ρ在(A)上成为(A)的基本拟范数的意义是，它成为(10.1)的一个特款。結合这个代数性的$(A) \subset (B)$及拓扑的强弱(10.1)，可写为$(A) \prec (B)$，例如$(\mathfrak{D}_K) \prec (\mathfrak{D}) \prec (C)$。

又說，$(\mathfrak{D})$稠密地含于(C)，就是，对各个$\varphi \in (C)$，存在有某系$\varphi_j \in (\mathfrak{D})$，使得$\varphi_j \to \varphi$ in (C)。实則还有更强地(C)伪收斂的φ_j：例如在§6所見的正則化$\alpha_\varepsilon * \varphi\ [\varepsilon \to 0]$就是这样。而且，这个$\alpha$以后时常要引用。現在，当$(A) \prec (B)$时，若把任意一个$\bar{S} \in (B)'$——$(B)$上的連續綫性泛函——在$(A)$上考虑，則成一个$S \in (A)'$。特別当$(A)$稠密地$\prec (B)$时，根据

$$\bar{S}(\varphi) = \lim S(\varphi_j) \quad [\varphi_j \in (A),\ \varphi_j \to \varphi \text{ in } (B)]$$

$\bar{S}$反而由S所决定，这样，$\bar{S}$与S可等同視之。在这种意义下，有

定理 10.1 (A)稠密地$\prec (B)$的話，就能看成代数性的$(B)' \subset (A)'$。这时，为了(A)上的綫性泛函S"属于"$(B)'$[正确地說，"开拓于某$\bar{S} \in (B)'$"]，其必要而充分的条件是S——在(A)上——关

于(B)拓扑連續:

$$\varphi_j \in (A),\ \varphi_j \to 0 \text{ in } (B) \text{时}\quad S(\varphi_j)\to 0.$$

代数性的包含关系

$$(\mathfrak{D})\subset(C)\subset(\mathfrak{E}^0),\quad (\mathfrak{D})\subset(\mathfrak{E})\subset(\mathfrak{E}^0) \tag{10.2}$$

是明显的[关于$(\mathfrak{E})$, $(\mathfrak{E}^0)$, 参看 § 8 末尾],现在就这里出現的組$(A)\subset(B)$, 包含$(\mathfrak{D})\in(\mathfrak{E}^0)$在內,来驗証定理的条件。首先,不論在何組,$(B)$的各基本拟范数在$(A)$上都成为$(A)$的基本拟范数,于是$(A)\prec(B)$. 为驗証其稠密性,取适合

$$\text{在 } |x|\leqslant s^{-1},\ \beta_s(x)=1\quad [\text{即}(4.14)]$$

的$\beta_s\in(\mathfrak{D})$, 把前見的$\alpha_s*\varphi$代以$\alpha_s*(\beta_s\varphi)$即可;詳細說,在图 10.1 左右并列的組使用$\alpha_s*\varphi$, 在上下的組仅用乘积$\beta_s\varphi$即可。这样,就得到共轭空間的代数关系

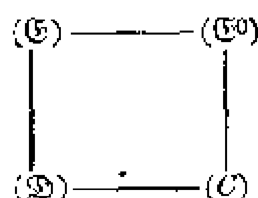


图 10.1

$$(\mathfrak{E}^0)'\subset(C)'\subset(\mathfrak{D})',\quad (\mathfrak{E}^0)'\subset(\mathfrak{E})'\subset(\mathfrak{D})'. \tag{10.3}$$

这也能概括于图 10.2。

此图将用于种种的共轭空間。这就說明了,特殊的广义函数自然也作用于較$(\mathfrak{D})$寬广的函数族。譬如說,单位的点质量δ_a, 根据$\delta_a(\varphi)=\varphi(a)$, 也能作用于一般的連續函数$\varphi\in(\mathfrak{E}^0)$, 所以能視为$\delta_a\in(\mathfrak{E}^0)'$. 把$\delta_a$的各阶微系数加入于$(\mathfrak{E})'$. 更一般地,如回顾广义函数支集的定义[§ 7],就有

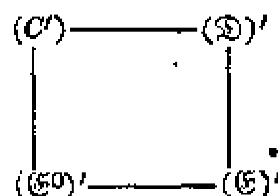


图 10.2

定理 10.2 具有有界支集的广义函数的全体是$(\mathfrak{E})'$, 具有有界支集的測度的全体是$(\mathfrak{E}^0)'$.

証明 仅就前半証明,后半亦同,且更簡单。(i) 把支集$\mathrm{Car}(S)$有界的$S\in(\mathfrak{D})'$具体地扩展之,使其成为$S\in(\mathfrak{E})'$. 如取s充分小,则$\alpha=\beta_s$ [見前] 在$\mathrm{Car}(S)$的邻域为 1, 对任意的$\varphi\in(\mathfrak{D})$, 在此邻域$\varphi=\alpha\varphi$, 从而得到[定理 7.2(iii)]

$$S(\varphi)=S(\alpha\varphi). \tag{10.4}$$

对于一般的 $\varphi\in(\mathfrak{E})$ 也有 $\alpha\varphi\in(\mathfrak{D})$，于是右端确定。詳細説，如置 $K=\mathrm{Car}(\alpha)$，則有 $\alpha\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$。这时，Leibniz 公式[参看(2.14)]

$$D^p(\alpha\varphi)=\sum_{q\leqslant p}C_q^p\alpha^{(p-q)}\varphi^{(q)}$$

的右端各項在 K 之外也都成 0，因之其絕对值的最大值为

$$\|D^p(\alpha\varphi)\|_\infty\leqslant\sum_{q\leqslant p}C_q^p\rho_K^{p-q}(\alpha)\rho_K^q(\varphi).$$

从而当 $\varphi_j\to\varphi$ in $(\mathfrak{E})$ 时，$\alpha\varphi_j\to0$ in $(\mathfrak{D}_K)$，于是 $S(\alpha\varphi_j)\to0$。由此可見，綫性泛函

$$(\mathfrak{E})\ni\varphi\Rightarrow S(\alpha\varphi)$$

連續，这就是所求的扩展。(ii) 設 $S\in(\mathfrak{E}')$。S 由某有限个基本拟范数所控制[定理 8.2(iv)]：

$$|S(\varphi)|\leqslant a\cdot\max\rho_K^q(\varphi).$$

右端所用 K [有限个]的并集 E 仍为有界閉集，若 $\mathrm{Car}(\varphi)$ 完全在 E 之外，則随同右端 $S(\varphi)=0$。这样，在 E 之外 $S=0$，从而[定理 7.2(ii)] $\mathrm{Car}(S)\subset E$，于是 $\mathrm{Car}(S)$ 亦有界。　　証毕

根据 § 6，連續函数 f 也可視为測度 m_f，于是代数性地 $(\mathfrak{E}^0)\subset(C)'$。这里如果局限于支集为有界，則有 $(C)\subset(\mathfrak{E}^0)'$；具体地説，在 $f\in(C)$ 的情形，对于一般的連續函数 $\varphi\in(\mathfrak{E}^0)$，

$$f(\varphi)=\int f\varphi\,dx=\int\varphi\,dm_f$$

也能适用。于是前見的两图可結合如图 10.3。

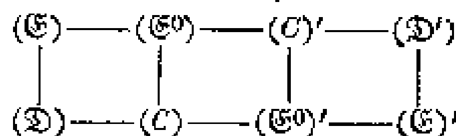


图 10.3

以上仅观察了代数性的关系，然如收斂概念参入共軛空間时，則要多少予以注意。

例 10.1　$|x|\to0$ 时，置于点 x 的单位质量 δ_x，作为測度[作为广义函数也可]单純地向 0 收斂：

对于各 $\varphi\in(C)$，$\delta_x(\varphi)\to0$。

实际上，若 x 离开 $\mathrm{Car}(\varphi)$ 便成 $\delta_x(\varphi)=\varphi(0)=0$。离开支集的时期则应依存于 φ。相反，如取一般的 $\varphi\in(\mathfrak{E}^0)$，或是稍加限制的一般的 $\varphi\in(\mathfrak{E})$，则不必有 $\delta_x(\varphi)\to 0$。还有，把例 9.2 的 $\tau_x\alpha\in(\mathfrak{D})$ [根据上图] 考虑作 $\tau_x\alpha\in(C)'$ 或是 $\tau_x\alpha\in(\mathfrak{D})'$，$\tau_x\alpha\in(\mathfrak{E}^0)'$ 等也有类似的情形。

§11 $(\mathfrak{D}_K)$的完备性，单純收斂定理

作为局部凸拓扑或是距离化的效应，广义函数及测度的概念关于极限运算是相当稳定的 [定理 11.3]。特别关于广义函数将在后面出现更深刻的强收斂定理，但本节只限于与 Banach 空間理論[参看本丛书《泛函分析》❶一书的 §21]平行的討論。

$(\mathfrak{D}_K)$ 根据 (8.8) 已經距离化，**而且关于这个距离完备**，就是說，凡适合 Cauchy 条件

$$\mathrm{dis}(\varphi_j,\ \varphi_i)\to 0$$

的系 $\varphi_j\in(\mathfrak{D}_K)$——称为 Cauchy 系——在 $(\mathfrak{D}_K)$ 必收斂于某 φ。这因为，根据定义 (8.8)，上面的 Cauchy 条件等同于

$$\varphi_j-\varphi_i\to 0 \text{ in } (\mathfrak{D}_K),$$

这时根据一致收斂 $\varphi_j(x)-\varphi_i(x)\to 0$ 可确定連續的极限函数

$$\varphi(x)=\lim_j \varphi_j(x) \quad [\text{一致极限}],$$

在 K 之外 φ_j 为 0，所以 φ 亦为 0，从而 $\mathrm{Car}(\varphi)\subset K$。因为 p 确定时 $D^p\varphi_j(x)$ 也一致收斂，所以能逐項微分，而且一致地 $D^p\varphi_j(x)\to D^p\varphi(x)$。因此 φ 是 C^∞ 級，从而 $\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$，于是 $\varphi_j\to\varphi$ in $(\mathfrak{D}_K)$。

这样就說明了 $(\mathfrak{D}_K)$ 的完备性。同样，(C_K)，$(\mathfrak{E})$，$(\mathfrak{E}^0)$ 也都能完备地距离化。在这种空間，有相当于 Banach 空間的 Гельфанд 引理或共鳴定理[見《泛函分析》，§21]：

定理 11.1 在完备地距离化了的局部凸空間 (A) 中，当連續

❶ 吉田耕作：《泛函分析》。在該书所見的賦范空間的一般理論乃是局部凸空間一般理論的典范。但要注意，該书中的'加性'此处称为'綫性'，而'綫性'此处則称为'連續綫性'。

拟范数的集 $\{\rho_j\}$ 在各点 $\varphi\in(A)$ 有界:

$$\rho(\varphi)=\sup_j \rho_j(\varphi)<\infty$$

时,上确界 ρ 也成为連續拟范数。

事实上,ρ 成为拟范数极为明显。为闡明其連續性,指出至少在一点的邻域有界就够了[定理 8.2(iii)]。如其不然的話,就同本丛书泛函分析一书中的定理 6.1 的証明一样,导致矛盾。

仅把定理的結論提取出来,一般地考虑在 (A) 中

$$\left.\begin{array}{l}\text{連續拟范数的集 } \{\rho_j\} \text{ 在各点有界时,}\\ \text{上确界必然成为連續拟范数}\end{array}\right\} \tag{11.1}$$

成立的那样的局部凸空間 (A)。前見各例之外,$(\mathfrak{D})$,(C) 虽然不能距离化,但有

定理 11.2 对于 $(\mathfrak{D})$,(C),(11.1) 也成立。

如就 $(\mathfrak{D})$ 論之,根据前定理,ρ 在各 $(\mathfrak{D}_K)$ 上連續,从而确是 $(\mathfrak{D})$ 的基本拟范数。就 (C) 論之亦然。这里要参照定理 8.2 的系,特别要注意对于由 $S_j\in(A)'$ 所决定的 $\rho_j(\varphi)=|S_j(\varphi)|$,出現

$$\rho(\varphi)=\sup_j |S_j(\varphi)|<\infty \tag{11.2}$$

的情况。

定理 11.3 [单純收斂定理] 設 (A) 是使 (11.1) 成立的局部凸空間。这时,序列 $S_j\in(A)'$ $[j=1, 2, \cdots]$ 如于各 $\varphi\in(A)$ 具有有限的极限

$$S(\varphi)=\lim_j S_j(\varphi), \tag{11.3}$$

則泛函 S 必属于 $(A)'$。

事实上,S 成为綫性是明显的。又因收斂数列有界,故得 (11.2),于是 $|S(\varphi)|\leqslant\rho(\varphi)$,从而 S 也連續[定理 8.2 的系]。故 $S\in(A)'$。

特别当广义函数列 S_j 单純收斂 (11.3) 时,把 $D^p\varphi$ 代入于 φ

且乘以$(-1)^{|p|}$，則得

$$D^p S(\varphi) = \lim D^p S_j(\varphi). \tag{11.4}$$

关于单純收斂序列，广义函数的逐項微分定理成立。进而关于广义函数項的无限級数

$$S = \sum_j S_j: \ S(\varphi) = \sum S_j(\varphi),$$

如其在各 $\varphi \in (\mathfrak{D})$ 收斂，S 就是广义函数，且可逐項微分。

关于参变数的微积分 考虑这样的情形：与实值参变数 λ 相关的广义函数 T_λ 已經确定，且在各 $\varphi \in (\mathfrak{D})$ 的对应 $\lambda \Rightarrow T_\lambda(\varphi)$ 連續。这时，在有限区間的积分

$$S = \int_a^b T_\lambda d\lambda: \ S(\varphi) = \int_a^b T_\lambda(\varphi)\, d\lambda$$

又給出广义函数 S。事实上，于(a, b)取如

$$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_j = b, \quad c_j = \frac{b-a}{j}$$

的等分点 λ_i，作广义函数

$$S_j = c_j(T_{\lambda_1} + \cdots + T_{\lambda_j}),$$

$S_j(\varphi)$ 正是分解求积法中所見的和，于是 $S_j(\varphi) \to S(\varphi)\ [j \to \infty]$。在这种情况下，把 D^p 置入积分号下則同于逐項微分。

例 11.1 对于 $\varphi \in (\mathfrak{D})$，积分順序容易調換

$$\int_0^a \left(2\int_{-\infty}^{\infty} \cos 2\pi\lambda x \cdot \varphi(x)\, dx\right) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi\, ax}{\pi x} \varphi(x)\, dx.$$

这表明了，把 x 的函数即使看成广义函数，普通的公式

$$2\int_0^a \cos 2\pi\, \lambda x \cdot d\lambda = \frac{\sin 2\pi a x}{\pi x}$$

也成立。所謂 Fourier 单积分定理：$a \to \infty$ 时

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi a x}{\pi x} \varphi(x)\, dx \to \varphi(0),$$

就說明了广义函数的单純收斂

$$\frac{\sin 2\pi a x}{\pi x} \to \delta = \delta(x).$$

或者还可写成

$$\delta(x) = \lim_{a\to\infty} 2\int_0^a \cos 2\pi\lambda x \cdot d\lambda.$$

对于各 $\varphi \in (\mathfrak{D})$，如果 $T_\lambda(\varphi)$ 关于 λ 可微，则微系数

$$U_\lambda = \frac{dT_\lambda}{d\lambda}: \quad U_\lambda(\varphi) = \frac{dT_\lambda(\varphi)}{d\lambda}$$

仍是广义函数：事实上，因为对应于序列 $\varepsilon_j \to 0$，置

$$S_j = \frac{1}{\varepsilon_j} T_{\lambda+\varepsilon_j} - \frac{1}{\varepsilon_j} T_\lambda,$$

则广义函数列 S_j 成为

$$S_j(\varphi) = \frac{1}{\varepsilon_j}(T_{\lambda+\varepsilon_j}(\varphi) - T_\lambda(\varphi)) \to U_\lambda(\varphi)$$

的緣故。关于**复値参变数** λ 的 $T_\lambda(\varphi)$ [每逢确定了 $\varphi \in (\mathfrak{D})$] 成为正则函数时，就說 T_λ，以及对应 $\lambda \Rightarrow T_\lambda$，是**正則的**。这时，微系数 $\frac{dT_\lambda}{d\lambda}$，以至逐次微系数 $\frac{d^m T_\lambda}{d\lambda^m}$ 都是广义函数；因此能作以广义函数 A_m 为系数的展开

$$T_{\lambda+\varepsilon}(\varphi) = T_\lambda(\varphi) + A_1(\varphi)\varepsilon + A_2(\varphi)\varepsilon^2 + \cdots \quad [\varepsilon: \text{复数}]。$$

§12 共軛空間的拓扑結构

如取局部凸空間 (A) 的一点 φ，就确定了共軛空間 $(A)'$ 上的拟范数

$$\rho_\varphi: \ \rho_\varphi(S) = |S(\varphi)| \quad [S \in (A)'].$$

若取所有的 $\varphi \in (A)$，把 ρ_φ 作为 $(A)'$ 的基本拟范数，就有 $S_j \to S$，就是說"在 (A) 的各点 φ，$S_j(\varphi) \to S(\varphi)$"，也就是 (A) 上的单純收斂。这个拓扑叫做 $(A)'$ 上的单純收斂拓扑。以后将要看到，广义函数的单純收斂时常伴随着相当强的收斂。这类似于函数的广义一致收斂。

試取如下的集 $M \subset (A)$，以之代替点 φ：

$$\text{对于各 } S\in(A)',\ \sup_{\varphi\in M}|S(\varphi)|<\infty. \tag{12.1}$$

因此就确定了$(A)'$上的拟范数

$$\rho_M:\ \rho_M(S)=\sup_{\varphi\in M}|S(\varphi)|,$$

于是在 M 上的一致收斂 $S_j(\varphi)\to S(\varphi)$ 可表为 $\rho_M(S_j-S)\to 0$. 前見的 ρ_φ 卽 ρ_M 的一种[M 仅为一点 φ 的情形]。利用所有的如(12.1)那样的 M，把 ρ_M 作为$(A)'$的基本拟范数，这样，$S_j\to S$ 的意义就是"在各 M 上一致地 $S_j(\varphi)\to S(\varphi)$"，总之是，对于收斂要求尽可能的一致性。这时的拓扑叫作$(A)'$**的强拓扑**，这种收斂叫作**强收斂**。

把(12.1)变成更具体的形状如下。首先，参照本丛书泛函分析一书，特别考虑(A)是賦范空間，而 M 是其中适合(12.1)的点列 $\{\varphi_j\}$ 的情形。这时，共轭空間$(A)'$可看作是一个 Banach 空間 $(A)^*$——泛函分析一书中用的記号。根据泛函分析一书中的定理 5.4，可以了解为 $M\subset(A)^{**}$，在$(A)^*$，再引用該书的定理 6.2，卽知范数序列 $\{\|\varphi_j\|\}$ 有界。将此結果少許一般化，卽有

引理 若賦范空間(A)的子集 M 适合条件(12.1)，范数 $\|\varphi\|$ 便在 M 上有界：

$$\sup_{\varphi\in M}\|\varphi\|<\infty. \tag{12.2}$$

假如不是有界的話，就应有成为 $\|\varphi_j\|\to\infty$ 的序列 $\varphi_j\in M$，这样就与紧前的結果矛盾。

如(12.2)那样的集 M，曾称之为在賦范空間(A)有界。这是在 R^n[范数为 $|x|$]的有界性的扩充。在$(A)^*$常用的范数 $\|S\|$ 是对应于(A)的单位球 $M=\{\varphi;\ \|\varphi\|\leqslant 1\}$ 的 $\rho_M(S)$，一般的 $\rho_M(S)$ 則能以此控制：

$$\rho_M(S)\leqslant a\|S\|,\qquad a\text{ 是(12.2)的左端。}$$

从而仅用关于范数的收斂 $\|S_j-S\|\to 0$ 就能表达充分的强收斂

$S_j \to S$，于是$(A)'$的强拓扑就同依据$(A)^*$范数的拓扑一致。

一般的局部凸空間(A)的子集M，当(A)的各基本拟范数ρ在M上有界：

$$\sup_{\varphi \in M} \rho(\varphi) < \infty \tag{12.3}$$

的时候，叫做在(A)的**有界集**。例如，**收斂序列即有界**：是与定理9.3的情形相同。一般的收斂系则不必有界。**紧緻集有界**：是因連續函数的最大値定理成立之故。

例 12.1 在R^n中，已知有界閉集K是紧緻集。$\varphi \in (\mathfrak{D})$时，对于$x \in R^n$連續地对应着$\tau_x \varphi \in (\mathfrak{D})$[§4]，因之，$K$的由此而定的象集

$$E = \{\tau_x \varphi; x \in K\} \quad [\varphi \text{ 固定}]$$

也是紧緻的，从而在$(\mathfrak{D})$有界。把$(\mathfrak{D})$改变为(C)，$(\mathfrak{E})$，$(\mathfrak{E}^0)$亦同。

定理 12.1 为了局部凸空間(A)的子集M适合条件(12.1)，M的有界性乃是必要且充分的。在有界集M上，較定义更一般地，各連續拟范数都有界。

从有界性所以能获致(12.1)，是由于各S都被有限个基本拟范数控制之故[定理8.2(iv)]。定理的后半亦同。最后，假定(12.1)成立，对于任意指定的基本拟范数ρ，求証(12.3)成立。先叙說一下思想方法：把M在某賦范空間(A_ρ)中作一表描，对其象集取用引理，然后再还原于(A)。

对于某ρ，考虑(A)的子集

$$(W) = \{\varphi; \rho(\varphi) = 0\}.$$

根据拟范数的基本性质(8.1)，显見(W)是(A)的子向量空間。把依从$\mathrm{mod}(W)$的同余类与商空間[1]分别写为$\tilde{\varphi}$，(A_ρ)：

$$\tilde{\varphi} = \{\psi; \rho(\varphi - \psi) = 0\}, \quad (A_\rho) = \frac{(A)}{(W)}.$$

对于同余的φ，ψ $[\rho(\varphi - \psi) = 0]$，由(8.1)得$\rho(\varphi) = \rho(\psi)$。使这

[1] 見本丛书弥永昌吉著《代数学》，§5 例7。

个值对应于同余类 $\tilde{\varphi}$，就得到 (A_ρ) 上的范数[所謂自然范数]

$$(A_\rho)\ni\tilde{\varphi}\Rightarrow\|\tilde{\varphi}\|=\rho(\varphi),$$

这样就能把 (A_ρ) 看成賦范空間，由 (A) 到此的自然綫性映象

$$L:\ (A)\ni\varphi\Rightarrow L\varphi=\tilde{\varphi}\in(A_\rho)$$

連續。从而，当 $S\in(A_\rho)'$ 时，如置

$$S_0(\varphi)=S(L\varphi)\quad[\varphi\in(A)],\tag{12.4}$$

则 $S_0\in(A)'$。現在把使(12.1)成立的集 M 依据映象 L 映射到賦范空間 (A_ρ) 的子集

$$LM=\{L\varphi;\ \varphi\in M\},$$

对于各 $S\in(A_\rho)'$ 就有

$$\sup_{\tilde{\varphi}\in LM}|S(\tilde{\varphi})|=\sup_{\varphi\in M}|S_0(\varphi)|<\infty.\tag{12.5}$$

从而，把引理用于 $LM\in(A_\rho)$，即得

$$\sup_{\tilde{\varphi}\in LM}\|\tilde{\varphi}\|<\infty.$$

此式的左端就是 $\sup_{\varphi\in M}\rho(\varphi)$。 証毕

(12.4)与(12.5)的关系，进一步一般化了之后，将在次节利用[定理13.1]。把定理的后半及 $(A)\prec(B)$ 的判别准則(10.1)結合起来，則有

系1 $(A)\prec(B)$ 时，在 (A) 的有界集 M，在 (B) 必也有界。

已經知道，特别当 (A) 稠密地 $\prec(B)$ 时 $(B)'\subset(A)'$ [定理10.1]，根据系1，判别准則(10.1)能用于 $(B)'\subset(A)'$ 的强拓扑，这样就有

系2 若 (A) 稠密地 $\prec(B)$，則关于强拓扑，$(B)'\prec(A)'$。

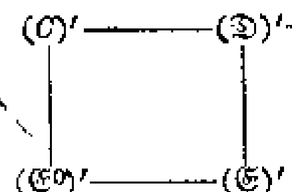


图 12.1

例 12.2 在 §10 已見的右图(图12.1)，伴随着代数性的 $\subset$ 必有关于强拓扑的 $\prec$。

还有，在上面定理的証明里所用的賦范空間 (A_ρ)，如果引用

泛函分析一书中的定理 5.4 [范数一致]，则有

$$\|\tilde{\varphi}\|=\sup_{\|S\|\leq 1}|S(\tilde{\varphi})|\quad [S\in(A_\rho)'].$$

把这个用(12.4)的 S_0 改写之后，即得

$$\rho(\varphi)=\sup_{\|S\|\leq 1}|S_0(\varphi)|. \tag{12.6}$$

在$(\mathfrak{D}_K)$的集 M 的有界性具体地能由无限个[对于各 p 值所要求的]不等式

$$\sup_{\varphi\in M}\|D^p\varphi\|_\infty<\infty \tag{12.7}$$

所表达。$(\mathfrak{D})$ 的各有界集 M，根据定理 9.4，分别各含于某一$(\mathfrak{D}_K)$，同时 $\rho^p(\varphi)=\|D^p\varphi\|_\infty$ 也是$(\mathfrak{D})$的基本拟范数，于是(12.7)成立，这就是說 M 在該$(\mathfrak{D}_K)$有界。与前定理的系 1 結合起来，则有

定理 12.2　$(\mathfrak{D})$的各有界集都含于某$(\mathfrak{D}_K)$，且在該$(\mathfrak{D}_K)$中有界；反之，$(\mathfrak{D}_K)$的有界集也都在$(\mathfrak{D})$中有界。关于(C)，(C_K)的有界集也有同样[因为定理 9.4 也是同样之故]結果。

换个說法，$(\mathfrak{D})$的子集 M 的有界性是由

$$\left.\begin{array}{l}\text{在 } X \text{ 的某有界閉集 } K \text{ 之外，所有的}\\ \varphi\in M \text{ 恒等于 } 0[K \text{ 与 } \varphi \text{ 无关}]\end{array}\right\} \tag{12.8}$$

这一事实以及(12.7)所确定的特征。如不用(12.8)的 K，而代以 X 的有界集[不必是閉的]亦可：因其閉包是有界閉集。在(C)的集 M 的有界性，其特征由(12.8)及唯一的不等式

$$\sup_{\varphi\in M}\|\varphi\|_\infty<\infty \tag{12.9}$$

确定。

今后把**强拓扑設为共軛空間的固有拓扑**。从而，例如广义函数的收斂，如不特别申明，则是$(\mathfrak{D})'$的强收斂。并应注意下列事項：

(i)　很多的收斂可視为广义函数收斂中的特殊情形，

(ii) 由广义函数的收斂可以推断很多的收斂。

关于(i)，作为一例，考虑局部可积函数的**局部平均收斂** $f_j\to f$，即于各有界閉集 K 有

$$\int_K |f_j-f|\,dx\to 0 \quad [K\text{ 上的平均收斂}]$$

的情形。在函数分析中，有效的收斂往往就是这一种：比如$(\mathfrak{E}^0)$或(L^p)的收斂就产生局部平均收斂。而且

定理 12.3 局部可积函数局部平均收斂 $f_j\to f$ 时，将其視为广义函数，也有 $f_j\to f$.

事实上，根据(12.8)，

$$\rho_M(f_j-f)=\sup_{\varphi\in M}\left|\int_K (f_j-f)\,\varphi\,dx\right|,$$

又据(12.7)[仅就0阶的 D^p]，有

$$\text{右端}\leqslant(\sup_{\varphi\in M}\|\varphi\|_\infty)\cdot\int_K|f_j-f|\,dx\to 0.$$

从而 $\rho_M(f_j-f)\to 0$.

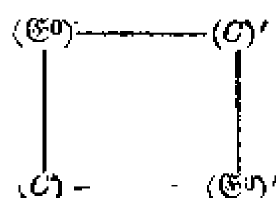


图 12.2

由此証明可見，即使作为測度也有 $f_j\to f$ [$(C)'$强收斂]。特别$(\mathfrak{E}^0)$的收斂也如是，于是$(\mathfrak{E}^0)\prec(C)'$. 并且，$(C)\prec(\mathfrak{E}^0)'$也容易知曉。

$(C)\prec(\mathfrak{E}^0)'$的簡証　把$(\mathfrak{E}^0)'$的基本拟范数 ρ_M 在(C)上考虑时，如其成为(C)的基本拟范数即可[判別准則(10.1)]，这等于說，在各(C_K)上連續即可。然而这个連續性由 $M\subset(\mathfrak{E}^0)$的有界性容易获知。

关于(ii)，观察卷积 $S*\varphi(x)=S(\tau_x\sigma\varphi)$. $S_j\to S$ 时，特别是在例12.1的有界集❶

$$E=\{\tau_x\varphi;\ x\in K\}\quad[\varphi\in(\mathfrak{D})\text{固定}]$$

上，也是一致地 $S_j(\tau_x\varphi)\to S(\tau_x\varphi)$. 向 φ 代入 $\sigma\varphi$，作为 x 的函数，則有

❶ 其有界性依据(12.7)及(12.8)[用其他的 K]也能判定。

在 K 上一致地 $S_j*\varphi(x)\to S*\varphi(x)$。

还能强化一步。如把这个 φ 代以 $D^p\varphi$，并用 $D^pS*\varphi=S*D^p\varphi$，则有

在 K 上一致地 $D^pS_j*\varphi(x)\to D^pS*\varphi(x)$。

每逢 K，p 給定时，恒是如此。这就是收斂$S_j*\varphi\to S*\varphi$ in $(\mathfrak{E})$。也可說是：綫型映象

$$(\mathfrak{D})'\ni S\Rightarrow S*\varphi\in(\mathfrak{E})$$

連續。

§13　共轭映象，各种运算的連續性

通常把(12.4)的 S_0 写成 L^*S，于是

$$L^*S(\varphi)=S(L\varphi)\quad[\varphi\in(A)]。\tag{13.1}$$

更一般地，給定了由局部凸空間(A)到局部凸空間(B)的連續綫性映象

$$L:\ (A)\ni\varphi\Rightarrow L\varphi\in(B)\tag{13.2}$$

的时候，对于各个 $S\in(B)'$，由 (13.1) 可以确定 $L^*S\in(A)'$。这个新映象

$$L^*:\ (B)'\ni S\Rightarrow L^*S\in(A)'\tag{13.3}$$

叫做与 L 共轭的映象。显見这也是綫性映象。又相当于 (12.5) 的，下面的(13.4)也是明显的。

定理 13.1　依据連續映象(13.2)，(A)的有界集 M 就能映射到(B)的有界集 LM，而且

$$\rho_{LM}(S)=\rho_M(L^*S)\quad[S\in(B)']。\tag{13.4}$$

共轭的綫性映象(13.3)也連續。

L^* 的連續性：当 $S_j\to0$ in $(B)'$ 时，对于$(A)'$的各基本似范数 ρ_M，

$$\rho_M(L^*S_j)=\rho_{LM}(S_j)\to0,$$

即 $L^*S_j\to0$ in $(A)'$。

特别根据在(12.4)所得的 $(A_p)'\ni S\Rightarrow L^*S=S_0\in(A)'$，$(A_p)'$ 的单位球 $M=\{S;\ \|S\|\leqslant 1\}$ 就能映射到 $(A)'$ 的有界集

$$N=LM=\{S_0;\ \|S\|\leqslant 1\},$$

而且(12.6)[把 S_0 写成 T] 还能写成

$$\rho(\varphi)=\sup_{T\in N}|T(\varphi)|. \qquad (13.5)$$

这样就有

定理 13.2 局部凸空間 (A) 的各基本拟范数 ρ，依据 $(A)'$ 的某有界集 N，可用(13.5)表达。

这个多少有些抽象性的定理将在 §15 中使用，現在重新返回前定理。偏微分运算

$$D:\ (\mathfrak{D})\ni\varphi\Rightarrow D\varphi\in(\mathfrak{D}) \quad [D=D^p,\ \|p\|=m]$$

的連續性已見于例 9.1，与之共轭的运算 D^*，与广义函徽的偏微分运算

$$(\mathfrak{D})'\ni S\Rightarrow DS\in(\mathfrak{D})' \quad [DS(\varphi)=(-1)^m S(D\varphi)]$$

仅差正負号：$D=(-1)^m D^*$. 所以，广义函数的偏微分运算連續。同样，在 $(\mathfrak{D})'$ 的

乘积	$S\Rightarrow\alpha S$	$[\alpha\in(\mathfrak{E})$ 固定];
平移	$S\Rightarrow\tau_x S$	$[x\in X$ 固定],
反轉	$S\Rightarrow\sigma S=\check{S}$	[或写 $S^\vee$]

也都連續。在 $(\mathfrak{E})'$ 中也完全相同。

关于单純收斂拓扑，这些也都連續。例如，当单純收斂 $S_j\to S$ 时，敌写为 $S_j(\alpha\varphi)\to S(\alpha\varphi)$，就能获知单純收斂 $\alpha S_j\to\alpha S$. 这就使得以 C^∞ 級函数 $\alpha_p(x)$ 为系数的綫性偏微分方程

$$\sum_{|p|\leqslant m}\alpha_p D^p S=T \quad [\alpha_p\in(\mathfrak{E}),\ m<\infty] \qquad (13.6)$$

的处理能够簡化。这里面的 T 以及解 S 都設为广义函徽。

定理 13.3 若(13.6)的解 S_j 向广义函数 S 单純收斂[强收

斂时更不待言]，則 S 也是解。且有

$$\sum a_p D^p \lim S_j = \lim \sum a_p D^p S_j = T.$$

例如在定理 12.3 那样的弱性收斂，解的极限还是解。但要注意广义函数的微分法，如 $Y' = \delta \neq 0$，是不同于普通微分法的。若 S 是 C^∞ 級函数，左端的 D^p 就与普通的微分法一致[当然 T 是連續函数]，S 就是普通意义的解。还有，如上所說，于最后单純收斂虽然够用，但也有不少情形为使途中的論証平易进行而使用强收斂的。

再論强拓扑，考虑例 9.1 的卷积映象

$$S*: (\mathfrak{D}) \ni \varphi \Rightarrow S*\varphi \in (\mathfrak{E}) \quad [S \in (\mathfrak{D})']$$

的共軛映象 $(S*)^*$. 那是

$$(\mathfrak{E})' \ni T \Rightarrow (S*)^* T \in (\mathfrak{D})',$$
$$(S*)^* T(\varphi) = T(S*\varphi).$$

特别把 $\psi \in (\mathfrak{D})$ 的反轉 $\check{\psi}$ 代入 S，則得

$$(\check{\psi}*)^* T(\varphi) = T(\check{\psi}*\varphi) = T*\psi(\varphi),$$

这里第二个等式是利用了 (4.11) 以及施行二次反轉即能复原的事实。仿此，在一般情况下，也把 $(\check{S}*)^* T$ 叫做卷积 $T*S$:

$$T*S(\varphi) = T(\check{S}*\varphi).$$

因为这是仅向 $(S*)^* T$ 中的 S 代入 $\check{S}$ 而已，所以

$$(\mathfrak{E})' \ni T \Rightarrow T*S \in (\mathfrak{D})'$$

也是連續綫性映象。

此外，如固定具有有界支集的 T，

$$(\mathfrak{D}) \ni \varphi \Rightarrow T*\varphi \in (\mathfrak{D}) \quad [T \in (\mathfrak{E})']$$

就也連續[例 9.1]，因此同样可以决定連續映象

$$(\mathfrak{D})' \ni S \Rightarrow S*T \in (\mathfrak{D})',$$
$$S*T(\varphi) = S(\check{T}*\varphi).$$

不論 S 或是 T 如果属于 $(\mathfrak{D})$，$T*S$, $S*T$ 就全都是 §4 的卷积，

而且可写成

$$T*S=S*T \quad [\text{交换律}]。$$

一般也如是,就是說

$$T(\check{S}*\varphi)=\check{S}(T*\varphi).$$

現在証明如下。利用了(4.16)的§4的 $U_\varepsilon=\beta_\varepsilon S_\varepsilon\in(\mathfrak{D})$,当 $\varepsilon\to0$ 时就有

$$U_\varepsilon(\varphi)\to S(\varphi) \quad [\text{单純收斂}]。$$

因为 U_ε 可以适用交换律,所以

$$T(\check{U}_\varepsilon*\varphi)=U_\varepsilon(\check{T}*\varphi)\to S(\check{T}*\varphi). \tag{13.7}$$

根据以后的强收斂定理[定理14.1及紧随該証明之后的变形],单純收斂 $U_\varepsilon\to S$ 实际就是强收斂❶

$$U_\varepsilon\to S \text{ in } (\mathfrak{D})',$$

从而 $\check{U}_\varepsilon\to\check{S}$ in $(\mathfrak{D})'$[利用反轉的連續性],因此根据前节末尾的結果,卽知

$$\check{U}_\varepsilon*\varphi\to\check{S}*\varphi \text{ in } (\mathfrak{E}).$$

又因 $T\in(\mathfrak{E})'$,所以 $T(\check{U}_\varepsilon*\varphi)\to T(\check{S}*\varphi)$。由此及(13.7),卽得 $T(\check{S}*\varphi)=S(\check{T}*\varphi)$。 証毕。

强收斂 $U_\varepsilon\to S$ 表明$(\mathfrak{D})$关于$(\mathfrak{D})'$稠密。根据这个稠密性与連續性,交换律就由 $S\in(\mathfrak{D})$ 扩展到 $S\in(\mathfrak{D})'$。又在§4所見的其他各公式,遵循大略相同的途徑,或是直接根据定义,也都能作出象下列的一般化

$$\delta*S=S \quad [\delta \text{ 为卷积单位}]$$

$$D^p(S*T)=(D^pS)*T=S*D^pT \quad [\text{将( )撤消}]。$$

特别这两公式要在常系数偏微分方程中使用[§17]。

作为直接方法的例子,試証

---

❶ 直接地,审查导致单純收斂的方法就容易了解这个强收斂,但要通过麻煩的手續。强收斂定理在这种情况下頗为有用。

$$U*(S*T)=(U*S)*T \quad [\text{結合律}];$$

这是广义函数 U, S, T 中至少有二属于 $(\mathfrak{E})'$ 的情形。事先要注意，根据 §4 的定义显見 $(S*\varphi)^{\vee}=\check{S}*\check{\varphi}$。将此一般化了的

$$(S*T)^{\vee}=\check{S}*\check{T}$$

也成立。为了說明这一点，使其两端作用于 φ，依照反轉 $\check{S}$ 的定义 $\check{S}(\varphi)=S(\check{\varphi})$ 与卷积的定义的形式，加以变形，就能知道

左端：$(S*T)^{\vee}(\varphi)=S*T(\check{\varphi})=S(\check{T}*\check{\varphi})$，

右端：$\check{S}*\check{T}(\varphi)=\check{S}(T*\varphi)=S((T*\varphi)^{\vee})$。

对比两最后端，即知其一致。

結合律的証明 仿照前例，使之作用于 φ，则有

左端：$U((S*T)^{\vee}*\varphi)=U((\check{S}*\check{T})*\varphi)$，

右端：$U(\check{S}*(\check{T}*\varphi))$，

于是归結于 $\check{S}*\check{T}*\varphi$ 的結合律。$\check{S}*\check{T}*\varphi$ 的結合律以同样方法归結于 $T*\check{\varphi}*\psi$ $[\psi\in(\mathfrak{D})]$ 的結合律，但后者已見于例 4.2。

作为驗証公式的手段，在 $(\mathfrak{D})$ 的稠密性之外，还有

定理 13.4 点质量 δ_x 的全体[对于一切点 $x\in X$] 是在 $(\mathfrak{D})'$ '完全的' (total)。就是說，由 $(\mathfrak{D})'$ 到局部凸空間 (A) 的連續綫性映象

$$L_i: (\mathfrak{D})'\ni S\Rightarrow L_iS\in(A) \quad [i=1, 2]$$

如对一切的 δ_x 有 $L_1\delta_x=L_2\delta_x$，则对于一切的 $S\in(\mathfrak{D})'$，$L_1S=L_2S$。

为了証明这一結論，把 $\varphi\in(\mathfrak{D})$ 看作广义函数，只要能闡明 $L_1\varphi=L_2\varphi$ 就可以了。于是，一般把前見的 U_ε 代入 φ，根据 L_i 的連續性卽得

$$L_1S=\lim L_1U_\varepsilon=\lim L_2U_\varepsilon=L_2S.$$

为簡明起見，設 X 是一維的[高維的大略相同]。将包含 φ 的支集的区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 用分点

$$a_0=a<a_1<\cdots<a_k=b$$

k 等分，且作点质量的綫性組合

$$\mu_k=\sum_{j=1}^{k}(\varphi(a_j)/k)\cdot\delta_{a_j},$$

这样就有

$$\mu_k(\psi)=\sum_{j=1}^{k}\varphi(a_j)\psi(a_j)/k \quad [\psi\in(\mathfrak{D})],$$

于是

$$\mu_k(\psi)\to\int_a^b\varphi(x)\ \psi(x)dx \quad [k\to\infty].$$

因为在 $a\leqslant x\leqslant b$ 之外 $\varphi(x)=0$，所以

$$\mu_k(\psi)\to\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\psi\ dx=\varphi(\psi) \quad [视为\ \varphi\in(\mathfrak{D})'].$$

实际这是强收歛 $\mu_k\to\varphi$ in$(\mathfrak{D})'$，虽然直接也容易了解，但由强收歛定理尤其明显。另一方面，因 L_i 是綫性的，根据 $L_1\delta_x=L_2\delta_x$ 就有 $L_1\mu_k=L_2\mu_k$，又由連續性得

$$L_1\varphi=\lim L_1\mu_k=\lim L_2\mu_k=L_2\varphi.$$

注意 13.1 依据把 S 写成 $S(x)$ 的記法，就得

$$\mu_k(x)=\sum_{j=1}^{k}(1/k)\cdot\varphi(a_j)\delta(x-a_j)$$

$$\to\varphi(x)=\varphi*\delta(x)=\int\varphi(y)\delta(x-y)dy.$$

这里的 $\int$ 应按 § 4 的意义来理解，但也可看作是关于参数 y 的积分。

§ 14 全有界性与强收歛定理

設 K 是 R^n 的有界集，ε 是任意正数，这时能取这样的有限个点 $x^{(1)},\cdots,x^{(k)}$，使其 ε 邻域把 K 复盖起来。这 $\{x^{(1)},\cdots,x^{(k)}\}$ 叫做 K 的 ε 网(ε-net)。一般，对于局部凸空間 (A) 上的連續拟范数 ρ 及集 $M\subset(A)$，称如下的有限集 $\{\varphi_1,\cdots,\varphi_m\}\subset M$ 为 M 的 (ρ,ε) 网：

对于各 $\varphi\in M$，有某 φ_ν 适合条件 $\rho(\varphi-\varphi_\nu)<\varepsilon$。

集 M 在 (A) 全有界的意义是，

对于任意的基本拟范数 ρ 以及任意的正数 ε，存在有 M 的 (ρ,ε) 网。 (14.1)

这时对于 (ρ,ε) 网 $\{\varphi_\nu\}$

$$\text{在 } M \text{ 上 } \rho(\varphi) < \max_\nu \rho(\varphi_\nu) + \varepsilon,$$

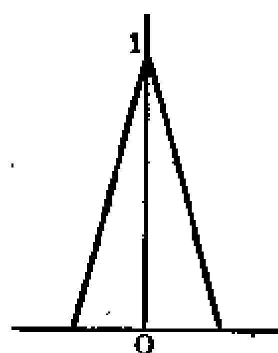


图 14.1

因此全有界集是有界的。逆定理不必成立。例如，置

$$\varphi_j(x) = \max(0, 1-j|x|)$$

时，无限序列 $\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$ 虽然在 (C) 有界，但非全有界。

当 M 全有界时，对任意的連續拟范数 ρ 及任意正数 ε，也存在有 (ρ,ε) 网。事实上，ρ 是由某有限个基本拟范数 $\rho_1, \cdots, \rho_\mu$ 所控制：

$$\rho(\varphi) \leqslant a \cdot \max(\rho_1(\varphi), \cdots, \rho_\mu(\varphi)),$$

如取适合 $2a\varepsilon' < \varepsilon$ 的正数 ε'，就能利用 (ρ_1, ε') 网等作出 (ρ,ε) 网。

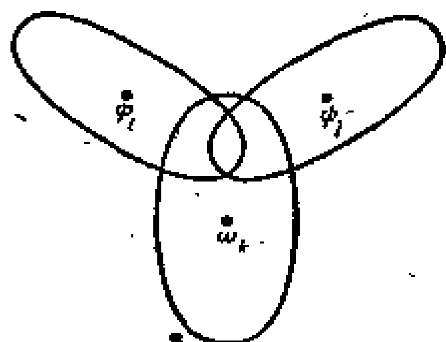


图 14.2

为简单起見，討論 $\mu=3$ 的情形。(ρ_1, ε') 网，(ρ_2, ε') 网，(ρ_3, ε') 网各設为 $\{\varphi_i\}$，$\{\psi_j\}$，$\{\omega_k\}$。对某一 $\varphi \in M$，有使

$$\rho_1(\varphi-\varphi_i) < \varepsilon', \quad \rho_2(\varphi-\psi_j) < \varepsilon', \quad \rho_3(\varphi-\omega_k) < \varepsilon'$$

成立的組 (i, j, k)，使 $\varphi \in M$ 中的一个与之对应，并記为 π_{ijk}。如取任意的 $\varphi \in M$，則对某三个 i, j, k，上列不等式都成立，于是

$$\rho_1(\varphi-\pi_{ijk}) \leqslant \rho_1(\varphi-\varphi_i) + \rho_1(\varphi_i-\pi_{ijk}) < \varepsilon' + \varepsilon'.$$

又关于 ρ_2, ρ_3 亦如是，最后得到

$$\rho(\varphi-\pi_{ijk}) < 2a\varepsilon' \leqslant \varepsilon.$$

这样，$\{\pi_{ijk}\}$ 就成为 (ρ,ε) 网。

現在証明 (②) 的有界集 M 在 (②) 全有界。已知 M 含于某 $(\mathfrak{D}_K)$，且在該 $(\mathfrak{D}_K)$ 有界。只須証明 $(\mathfrak{D}_K)$ 的有界集 M 在 $(\mathfrak{D}_K)$ 全有

界即可：闡明之后，依据(②)的基本拟范数 ρ 本是在$(②_K)$上連續的事实，卽能获知存在有如上所見的(ρ, ε)网。

由于 M 有界，可以找到两个定数a, b，使得对于所有的 $\varphi\in M$ 及其一阶微商，有

$$\|\varphi\|_\infty\leqslant a, \quad \left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\|_\infty\leqslant b. \tag{14.2}$$

按照平均值定理，有

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant b\cdot|x-y| \quad [\varphi\in M].$$

根据这些性質，卽能获知对于 $\rho^0(\varphi)=\|\varphi\|_\infty$，$(\rho^0, \varepsilon)$网存在，詳見后文。对于一般的 $\rho^p(\varphi)=\|D^p\varphi\|_\infty$，将(14.2)代以

$$\|D^p\varphi\|_\infty\leqslant a_p=\text{const}, \quad \left\|\frac{\partial D^p\varphi}{\partial x_i}\right\|_\infty\leqslant b_p=\text{const},$$

以此为根据而同样考虑之卽可。为了証明(ρ^0, ε)网的存在，固然可以引用 Ascoli-Arzela 定理，但这里作构造性的直接証明。

首先取 $3\varepsilon'<\varepsilon$, $3b\varepsilon'<\varepsilon$ 的正数 ε'. 因 K 在 R^n 有界，所以存在

$$K \text{ 的 } \varepsilon' \text{ 网 } \{x^{(1)}, \cdots, x^{(k)}\}.$$

对于一切的 $\varphi\in M$，使以 $\varphi(x^{(j)})$为坐标的

$$u(\varphi)=(\varphi(x^{(1)}), \cdots, \varphi(x^{(k)}))\in R^k$$

与之对应，考虑这些 $u(\varphi)$ 的全体 $H=\{u(\varphi);\ \varphi\in M\}$. 由于 $|\varphi(x^{(j)})|\leqslant a$，故 H 在 R^k 有界，从而存在

$$H \text{ 的 } \varepsilon' \text{ 网 } \{u(\varphi_1), \cdots, u(\varphi_m)\}.$$

这样給出的 $\{\varphi_1, \cdots, \varphi_m\}$ 乃是 M 的(ρ^0, ε)网。

其証明如下。

对于各 $\varphi\in M$, $u(\varphi)$必进入某 $u(\varphi_\nu)$ 的 ε' 邻域：$|u(\varphi)-u(\varphi_\nu)|<\varepsilon'$. 这时，$u(\varphi)$与 $u(\varphi_\nu)$的坐标之差满足：

$$|\varphi(x^{(j)})-\varphi_\nu(x^{(j)})|<\varepsilon' \quad [j=1, \cdots, k].$$

各 $x\in K$ 分别进入某 $x^{(j)}$ 的 ε' 邻域，于是

$$|\varphi(x)-\varphi(x^{(j)})|\leqslant b\cdot|x-x^{(j)}|<b\varepsilon',$$
$$|\varphi_\nu(x^{(j)})-\varphi_\nu(x)|<b\varepsilon'.$$

将这与上面的不等式結合起来，即得

$$|\varphi(x)-\varphi_\nu(x)|<b\varepsilon'+\varepsilon'+b\varepsilon'<\varepsilon.$$

在 K 之外，左端为 0，因之最大值 $\rho^0(\varphi-\varphi_\nu)<\varepsilon$。

这样一来，在 $(\mathfrak{D}_K)$ 中，从而在 $(\mathfrak{D})$ 中，有界集必全有界。而且，在 $(\mathfrak{E})$ 中也是有界集必全有界，証明和 $(\mathfrak{D}_K)$ 的情形相同。根据上面的結果，单純收斂定理还能强化如下：

定理 14.1 [强收斂定理] 若序列 $S_j\in(\mathfrak{D})'$ $[j=1, 2, \cdots]$ 于各 $\varphi\in(\mathfrak{D})$ 具有有限的极限

$$S(\varphi)=\lim_j S_j(\varphi), \tag{14.3}$$

则 $S\in(\mathfrak{D})'$，于是 S_j，$(\mathfrak{D})'$ 强收斂于 S。在 $(\mathfrak{E})'$ 中亦同[把 $(\mathfrak{D})$ 改換为 $(\mathfrak{E})$.]

就 $(\mathfrak{D})'$ 而言，$S\in(\mathfrak{D})'$ 已見于 § 11。再应用該处所利用的拟范数

$$\rho:\ \rho(\varphi)=\sup_j|S_j(\varphi)|$$

的連續性以及

$$|S_j(\varphi)|\leqslant\rho(\varphi),\quad |S(\varphi)|\leqslant\rho(\varphi) \tag{14.4}$$

求証强收斂，就是对 $(\mathfrak{D})'$ 的基本拟范数 ρ_M，求証 $\rho_M(S_j-S)\to0$。也就是說要闡明，对于任意給定的正数 ε，終于成为 $\rho_M(S_j-S)<\varepsilon$。試取正数 $\varepsilon'<\frac{\varepsilon}{3}$。因有界集 $M\subset(\mathfrak{D})$ 全有界，所以根据連續性可知存在有

$$M \text{ 的}(\rho,\varepsilon')\text{网 } \{\varphi_1, \cdots, \varphi_k\}. \tag{14.5}$$

各 $\varphi\in M$ 分别对于某 φ_ν 应有 $\rho(\varphi-\varphi_\nu)<\varepsilon'$，这时根据(14.4)乃有

$$|S_j(\varphi)-S_j(\varphi_\nu)|=|S_j(\varphi-\varphi_\nu)|<\varepsilon',$$
$$|S(\varphi_\nu)-S(\varphi)|=|S(\varphi-\varphi_\nu)|<\varepsilon'.$$

因 φ_ν 是有限个，根据(14.3)，終于成为

$$\text{对于一切的 } \varphi_\nu,\ |S_j(\varphi_\nu)-S(\varphi_\nu)|<\varepsilon', \tag{14.6}$$

与上面的不等式結合起来，即得

$$|S_j(\varphi)-S(\varphi)|<3\varepsilon' \quad [\varphi\in M],$$

于是其上确界 $\rho_M(S_j-S)\leqslant 3\varepsilon'<\varepsilon$。 証毕

把下标 j [自然数] 置换为趋近于某值 λ_0 的实数，单純收斂 $S_\lambda\to S$ 实际成为强收斂，这是因为对于任意序列 $\lambda_j\to\lambda_0$ 产生强收斂之故❶。

考虑实数或复数的組亦可。現在，将上面定理的証明少許变动一下，采用同于$(\mathfrak{D}_K)$情形的方法，即得如下定理。

定理 14.2 集 $N\subset(\mathfrak{D})'$ 如对各 $\varphi\in(\mathfrak{D})$ 适合条件

$$\sup_{S\in N}|S(\varphi)|<\infty, \tag{14.7}$$

則 N 在$(\mathfrak{D})'$ 中全有界。在$(\mathfrak{E})'$ 中亦同[$(\mathfrak{D})$改变为$(\mathfrak{E})$]。

这就是說存在有 N 的(ρ_M,ε)网。

簡証 設(14.7)的左端为 $\rho(\varphi)$，这时 ρ 也成为連續拟范数[把定理11.2用于 $\{\rho_S;\ S\in N\}$]。对此，与前同样决定(14.5)，如置

$$u(S)=(S(\varphi_1),\cdots,S(\varphi_k))\in R^k,$$

$$H=\{u(S);\ S\in N\},$$

根据 $|S(\varphi_\nu)|\leqslant\rho(\varphi_\nu)$，$H$ 就成为 R^k 的有界集，于是存在有

$$H \text{ 的 } \varepsilon' \text{ 网 } \{u(S_1),\cdots,u(S_m)\}.$$

这样給出的 $\{S_1,\cdots,S_m\}$ 就是 N 的(ρ_M,ε) 网：事实上，对于各个 $S\in N$，$u(S)$进入某 $u(S_j)$的 ε' 邻域，这时(14.6)成立，于是 $\rho_M(S_j-S)<\varepsilon$。

上面的主要論点易于抽象化，面且在后面也有用：

定理 14.3 假設在局部凸空間 (A) 有界集恒是全有界，并且单純收斂定理的条件(11.1)成立。这时，序列 $S_j\in(A)'$ 的单純收斂 $S_j\to S$ 是$(A)'$ 强收斂[强收斂定理]，又对各 $\varphi\in(A)$，适合条

❶ 实值函数 $f(\lambda)$ 如对任意序列 $\lambda_j\to\lambda_0$ 有 $f(\lambda_j)\to 0$，則 $f(\lambda)\to 0$ $[\lambda\to\lambda_0]$，这是微积分的基本定理。对于 $\rho_M(S_\lambda-S)$ 就利用这一事实。

件(14.7)的集 $N\subset(A)'$ 在 $(A)'$ 中全有界。

在 $(C)'$ 中,定理的后半不成立,已見于本节前部关于无限序列 $M=\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots\}$ 的例子。在 $(C)'$ 中也没有相当于强收斂定理的性质。例如,在正則化中所用的 α_ε [§ 4] 看作测度时,对于各个 $\varphi\in(C)$, $\alpha_\varepsilon(\varphi)\to\delta(\varphi)$ $[\varepsilon\to0]$ 是明显的,然而这个收斂在上面的 M 并非一致:容易了解

$$\rho_M(\delta-\alpha_\varepsilon)=\sup_j|\delta(\varphi_j)-\alpha_\varepsilon(\varphi_j)|=1.$$

如限于 $\varphi\in(\mathfrak{E})$,根据 $(\mathfrak{E})'$ 的强收斂定理可得

$$\text{强收斂 } \alpha_\varepsilon\to\delta \text{ in } (\mathfrak{E})',$$

又由卷积映象的連續性得到

$$\alpha_\varepsilon*S\to\delta*S=S \text{ in } (\mathfrak{D})' \quad [S\in(\mathfrak{D})'].$$

同样地,若 $S\in(\mathfrak{E})'$,則有 $\alpha_\varepsilon*S\to S$ in $(\mathfrak{E})'$.

§ 15　$(\mathfrak{D})$, $(\mathfrak{E})$ 的自反性

把賦范空間 (A) 考虑为 $(A)\subset(A)''$ 已用于 § 12。把同样的思想利用于 $(\mathfrak{D})$,則有 $(\mathfrak{D})=(\mathfrak{D})''$. 虽然 $(\mathfrak{D})$ 的共軛空間是 $(\mathfrak{D})'$,反之,也可认为 $(\mathfrak{D})$ 是 $(\mathfrak{D})'$ 的共軛空間。現在簡略地說明这个事由。虽然直接应用不多,但有助于統一的理解。

把一个 $\varphi\in(\mathfrak{D})$ 固定,对于各 $S\in(\mathfrak{D})'$,使 $S(\varphi)$ 与之对应,这样,$(\mathfrak{D})'$ 上的泛函

$$L_\varphi:\ (\mathfrak{D})'\ni S\Rightarrow L_\varphi(S)=S(\varphi)$$

就确定了。把 aS, $S+T$ 的定义用 L_φ 写出来,就有

$$L_\varphi(aS)=aL_\varphi(S),\quad L_\varphi(S+T)=L_\varphi(S)+L_\varphi(T).$$

这能了解为 L_φ 在 $(\mathfrak{D})'$ 上是綫性的。而且,L_φ 显見是連續的:

$$S_j\to S, \text{ 則 } L_\varphi(S_j)\to L_\varphi(S).$$

L_φ,属于 $(\mathfrak{D})'$ 的共軛空間 $(\mathfrak{D})''$. 再把 $S\in(\mathfrak{D})'$ 的綫性性质改写

一下，就有

$$L_{a\varphi}(S)=aL_\varphi(S),\quad L_{\varphi+\psi}(S)=L_\varphi(S)+L_\psi(S),$$

这就是

$$L_{a\varphi}=aL_\varphi,\quad L_{\varphi+\psi}=L_\varphi+L_\psi.$$

以上由 $\varphi\in(\mathfrak{D})$确定了 $L_\varphi\in(\mathfrak{D})''$，反之根据

$$L_\varphi(\delta_x)=\delta_x(\varphi)=\varphi(x),\tag{15.1}$$

由 L_φ 可以确定 φ。从而把 φ 与 L_φ 等同視之，可以了解为代数性的$(\mathfrak{D})\subset(\mathfrak{D})''$。

注意 15.1 $S=\psi\in(\mathfrak{D})$ 时

$$L_\varphi(\psi)=S(\varphi)=\int\psi\varphi\,dx.$$

从而，这里的 L_φ 的用法与以前的 L_φ 的用法并无不合。

以(15.1)为出发点，求証

$$\text{各 } L\in(\mathfrak{D})'' \text{ 都能表成 } L=L_\varphi.\tag{15.2}$$

这就是說，上面的$(\mathfrak{D})\subset(\mathfrak{D})''$实际成为代数性的一致$(\mathfrak{D})=(\mathfrak{D})''$。为此，把 L 作为給定的，試取 x 的函数

$$\varphi(x)=L(\delta_x).$$

如闡明 $\varphi\in(\mathfrak{D})$，此式也能写成

$$L_\varphi(\delta_x)=L(\delta_x).$$

因为点质量 δ_x 的全体是完全的[定理 13.4]，所以有恒等式 $L_\varphi(S)=L(S)$，于是証毕。

$\varphi\in(\mathfrak{D})$的証明 仿照§4，取第 i 坐标 $a_i\neq0$，其他坐标为 0 的向量 a，并設其关于第 i 坐标的一阶偏微分为 D_i。在§4 所見的单純收斂

$$\tau_yS\to\tau_xS\quad[y\to x],$$

$$a_i^{-1}(\tau_{-a}S-S)\to D_iS\quad[a_i\to0]$$

实际是强收斂[强收斂定理]，所以 $F(x)=L(\tau_xS)$ 是 x 的連續函数，且有連續的微系数

$$D_iF(x)=L(-\tau_x D_i S).$$

于是同 §4 的 F 一样，这个 F 也是 C^∞ 級的函数。特别，置 $S=\delta$，則 $F=\varphi$ 为 C^∞ 級。其次，用任意系数 $a(x)$ 乘 $\varphi(x)$，則得

$$a(x)\varphi(x)=L(a(x)\delta_x).$$

具有参数的广义函数 $S_x=a(x)\delta_x$，当 x 趋向无限远，則单純地 $S_x\to 0$。这实际也是强收斂，于是

$$a(x)\varphi(x)=L(S_x)\to 0.$$

在使 $\varphi(x)\neq 0$ 的点 x，設 $a(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)}$。依从上面的收斂，在充分远处，$a(x)\varphi(x)\neq 1$。从而 $\varphi(x)=0$。由此可見，φ 的支集有界，于是 $\varphi\in(\mathfrak{D})$。至此就完成了关于代数性的 $(\mathfrak{D})=(\mathfrak{D})''$ 的証明。

在 $(\mathfrak{D})''$，有作为 $(\mathfrak{D})'$ 的共軛空間的固有拓扑。它的基本拟范数的一般形是由 $(\mathfrak{D})'$ 的有界集 N 所确定的 ρ_N：

$$\rho_N^*(L)=\sup_{S\in N}|L(S)|.$$

在这里若把 $L=L_\varphi$ 与 φ 視为同一物，則得

$$\rho_N(\varphi)=\sup_{S\in N}|S(\varphi)|<\infty.$$

因为 $\rho_S(\varphi)=|S(\varphi)|$ 是在 $(\mathfrak{D})$ 拓扑的連續拟范数，所以根据定理 11.2，ρ_N 也在 $(\mathfrak{D})$ 拓扑連續。又 $(\mathfrak{D})$ 的任意基本拟范数 ρ，根据定理13.2，可以表成上面 ρ_N 的形状，即成为 $(\mathfrak{D})''$ 拓扑的基本拟范数。

从而，若 $\varphi_j\to\varphi$ in $(\mathfrak{D})$，則有 $\varphi_j\to\varphi$ in $(\mathfrak{D})''$，逆理也成立。这样就有[1]

定理 15.1 $(\mathfrak{D})$ 是自反的(reflexive)。即，如看成 $\varphi=L_\varphi$，則有代数性的 $(\mathfrak{D})=(\mathfrak{D})''$，于是 $(\mathfrak{D})$ 拓扑与 $(\mathfrak{D})''$ 拓扑一致。$(\mathfrak{E})$ 也是自反的[証明亦同]。

---

[1] 关于基本空間自反的一組充分条件以及利用这些条件給予 $(\mathfrak{E})$，$(\mathfrak{D})$，以及其它空間自反性的証明，請見我国学者馮康著：《广义函数的泛函对偶关系》，数学进展 3:2(1957)，201～208。——校者注

第3章　卷积与基本解

广义函数的一般理論，概括地說，在于改进微积分法。从特殊看一般的話，改进的途徑已充分体现于前两章。本书的主要目的已經完成。本章将提示利用 § 13 卷积的方法。主要是为了导入微分方程的基本解概念。为了思考簡便起見，以論述 Euclid 空間 R^n 上的广义函数为主，然其結果的大部借助'局部化'的方法也可适用于 R^n 的开集或是环面 (torus) 上的广义函数，而且时常有助于在一般 C^∞ 流形上的研究。

§ 16　关于卷积与积分記号的探討

利用卷积之前，有必要再檢查一下普通函数的卷积 $f*g$ 与 § 13 的广义函数卷积的关系。这和原有的积分 (Lebesgue) 与表示 $S(\varphi)$ 的形式的积分 $\int S(x)\varphi(x)dx$ [§ 3] 以及 § 11 中关于参数的积分 $\int S_\lambda d\lambda$ 的并用也有联系。

关于原有积分的卷积　关于局部可积函数 f, g，普通的卷积 $f*g$ 定义为

$$f*g(x)=\int f(y)g(x-y)dy. \tag{16.1}$$

但通常考虑

$$h(x)=\int |f(y)g(x-y)|dy \tag{16.2}$$

成为 x 的局部可积函数的情形。在这样的限制下，如調换 f 与 g，其結果相同。这时，$f*g$ 当然也是局部可积且有 $f*g=g*f$ [几乎到处]。又据上述限制，調换积分順序的計算可順利进行。可測的被积函数 $\geqslant 0$ [几乎到处]或是可积时，积分順序可任意調换；卽所謂 Fubini 定理。

作为能保証 h 的局部可积性的一种情形，特别可提出

$$f \text{ 的支集或是 } g \text{ 的支集[至少有一]有界} \tag{16.3}$$

的情形。为明确起見，姑且設 g 的支集 A 有界，然后証明 h 的性质。首先注意，g 实际是可积的——在全空間 X：

$$\int_X |g(x)|dx = \int_A |g(x)|dx < \infty.$$

現在，应說明对于任意指定的有界积分范圍 B，$\int_B h(x)dx < \infty$。当 x 在 B 上移动时，(16.2)右端的积分不过是在某一定的[由 A 与 B 所确定]有界积分范圍 C 上所取的。利用这个，根据 Fubini 定理[被积函数 $\geqslant 0$]可变形为

$$\int_B h(x)dx = \int_C \left(\int_B |f(y)g(x-y)|dx \right) dy,$$

然后把 $|f(y)|$ 提出到 $\int_B$ 之外，最后得

$$\int_B h(x)dx \leqslant \int_C |f(y)|dy \cdot \int_X |g(x)|dx < \infty.$$

形式的积分 对于 $S \in (\mathcal{D})'$，$\varphi \in (\mathcal{D})$，曾用形式的积分 $\int S(x)\varphi(x)dx$ 表示 $S(\varphi)$。所以把 S 写为 $S(x)$，是为了把 x 作为积分变数，因而对于 x 的各个值，記号 $S(x)$ 时常失掉其意义。§4 的卷积 $S*\varphi$ 也能表为

$$S*\varphi(x) = \int S(y)\varphi(x-y)dy,$$

此式右端的 x[規定 y 的函数 $\varphi(x-y)$]可視为参数。特别如 S 为局部可积函数，則这类形式积分就与原有的积分一致，因之 $S*\varphi$ 即成为普通的卷积。由此扩充出来的 §13 卷积的定义与 (16.1) 相重复的情形，就是(16.3)的情形。这时，把普通的卷积 $f*g$ [局部可积函数!] 看作广义函数，并使之作用于 $\varphi \in (\mathcal{D})$，借用反轉的記号 $\check{g}(x) = g(-x)$，即得

$$f*g(\varphi) = \int f*g(x) \cdot \varphi(x)dx \quad \text{[定义]}$$

$$= \int f(y) \cdot \check{g}*\varphi(y)dy \quad \text{[Fubini 定理]。}$$

第三端是 $f(\check{g}*\varphi)$，这不过是 §13 意义下的 $f*g(\varphi)$。这样，互相重复的两定义就一致了。

因而，也可考虑把 §13 中一般的 $S*T$ 形式地表为

$$S*T(x)=\int S(y)T(x-y)dy. \tag{16.4}$$

依据把 S 写作 $S(x)$ 的記法，把 $S*T$ 写成 $S*T(x)$. 同样，$T(x-y)$ 可看作是把 $T=T(x)$ 平移[§4]了的 $\tau_y T$. 这对于 y 的各个值——但 x 不固定——虽具有意义，然 $S(y)T(x-y)$ 不必有独立的意义。但下列情况則是例外。

关于参数的积分　S 是局部可积函数时，视 y 为参数，对于 y 的几乎所有值❶，就确定了广义函数

$$U_y=S(y)\tau_y T \quad [=S(y)T(x-y)].$$

这时，(16.4) 的右端也可看作是关于参数的积分

$$V=\int U_y dy: \quad V(\varphi)=\int U_y(\varphi)dy$$

[对于各 $\varphi\in(\mathcal{D})$，是关于 y 的原有积分]。

因为根据 §4 得到

$$T*\varphi(y)=\tau_y\check{T}(\varphi), \quad \check{T}*\varphi(y)=\tau_y T(\varphi),$$

于是在 §13 的定义 $S*T(\varphi)=S(\check{T}*\varphi)$ 的右端的（ ）中置入 $\tau_y T(\varphi)$，則得

$$S*T(\varphi)=\int S(y)\tau_y T(\varphi)dy. \tag{16.5}$$

即使 S 不是局部可积函数，但把右端看成形式的积分，也就是說，看成使 S 作用于 y 的函数 $\tau_y T(\varphi)$ 而得的积分，(16.5) 就应成立。

象上面这样能簡单推得关于各种积分的一致的情形，今后并不一一驗証，甚至不加申明地使用。

---

❶ 使函数值 $S(y)$ 确定的 y 值。

§ 17　基本解的概念

空間 $X=R^n$ 上的 C^∞ 級函数，已知其能乘于 X 上任意的广义函数。因此，对于綫性[偏]微分方程

$$\sum_{|p|\leq m} \alpha_p(x) D^p f(x) = g(x) \quad [m<\infty],$$

如果其各系数 α_p 是 C^∞ 級函数，就能轉移到广义函数的范圍来处理。依照 C^∞ 級的微分算子

$$D=\sum_{|p|\leq m} \alpha_p D^p \quad [\text{各 } \alpha_p \in (\mathfrak{E}), \text{阶数 } m<\infty],$$

可以考虑广义函数微分方程

$$DT=S \quad [S\in(\mathfrak{D})', T\in(\mathfrak{D})'].$$

特别，对于一点 $y\in X$，如果存在有使

$$DE_y=\delta_y \quad [\text{置于点 } y \text{ 的单位质量}]$$

成立的 $E_y\in(\mathfrak{D})'$，就称 E_y 为在点 y 的 D 的**基本解** (elementary solution)。現在試以 E_y 为构成元素(element)，建立 $DT=S$ 的一个解。

其途徑建基于如下的直观思考。把 (16.5) 用于既知的公式 $S*\delta=S$，就有

$$S=\int S(y)\tau_y\delta dy=\int S(y)\delta_y dy,$$

这好象是质点 δ_y 集結起来作成了 S。这样，集中适当的基本解 E_y，令为

$$T=\int S(y)E_y dy, \tag{17.1}$$

将有 $DT=S$。当然，象(17.1)中的积分的意义实有加以說明的必要。

作为实例，对于在最簡单的一維空間 $X=R^1$ 的 $\dfrac{d}{dx}$，Heavi-

side 函数 Y 就是在原点的基本解：$Y'=\delta$。关于空間 R^n 的 Laplace 算符

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2},$$

如在 §5 的例子所見那样，

$$\Delta|x|^{2-n}=\frac{2(2-n)\sqrt{\pi^n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\delta \quad [n\neq 2],$$

$$\Delta\log|x|=2\pi\delta \qquad [n=2],$$

但其 $|x|=\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$，

因而作为在原点的 Laplace 算符的基本解，可取如下的局部可积函数 E：

$$\left.\begin{aligned} &E=e_n|x|^{2-n},\quad e_n=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2(2-n)\sqrt{\pi^n}} &&[n\neq 2];\\ &E=e_2\log|x|,\quad e_2=\frac{1}{2\pi} &&[n=2]. \end{aligned}\right\} \tag{17.2}$$

基本解可能有任意多种。例如，对于 $X=R^1$，$\Delta=d^2/dx^2$，按(17.2)的 $E=\frac{|x|}{2}$ 之外，

$$E+\frac{x}{2}=\max(x,0)=xY \tag{17.3}$$

也是便利的基本解。

对于象 $\frac{d}{dx}$ 或 Δ 那样的常系数[各 $a_p=\mathrm{const}$]的微分算子 D，情况則較为簡单。首先注意，关于这种算子与平移，容易証明的公式

$$\left.\begin{aligned} D(S*T)&=(DS)*T=S*DT,\\ \tau_y(S*T)&=(\tau_yS)*T=S*\tau_yT. \end{aligned}\right\} \tag{17.4}$$

式中的(　)終于成为不必要。特别把(17.4)应用于 $\delta*S=S$，則有

$$DS = D\delta * S, \quad \tau_y S = \tau_y \delta * S = \delta_y * S, \tag{17.5}$$

或者也能形式地写成 $D = D\delta *$, $\tau_y = \delta_y *$。定系数的微分算子及平移，也可看做是卷积映象。根据这一点以及卷积的結合律和交換律，或者直接地，都容易得出公式

$$D\tau_y S = \tau_y DS. \tag{17.6}$$

$D\tau_y$ 也可写成 $D\delta_y *$。

关于常系数微分算子 D，单說基本解，就是指在原点的基本解。这时，若把基本解 E 平移之，$E_y = \tau_y E$ 即成在点 y 的基本解：参照(17.5)。若把这个代入(17.1)，当能設想如下的定理。

定理 17.1 对于常系数微分算子 D 能求基本解 E 时，关于右端的支集为有界的方程

$$DT = S \quad [S \in (\mathfrak{E})']. \tag{17.7}$$

$T = E * S$ 就是一个解。

事实上，根据(17.4)即得

$$D(E * S) = DE * S = \delta * S = S.$$

关于支集的限制就是为了作成卷积的条件。适当地扩充卷积的定义——保持(17.4)成立——，将能得出更一般的定理。或者，对于支集非有界的右端 S，利用在§7所討論的1的分解 $\sum_j \alpha_j$，也能考虑分成

$$T = \sum_j T_j, \quad DT_j = \alpha_j S_j$$

这样两段的解法。这里第二式右端的支集有界。第一式关联到和的收斂問題，但如保証广义函数和的单純收斂即可。

例 17.1 因平移(17.2)的 E 而得的

$$\tau_y E = E(x-y) = e_n |x-y|^{n-2} \quad 或 \quad e_2 \log |x-y|,$$

当不考虑它們的系数时，各成为点 y 上单位质量 δ_y 所产生的牛頓場位$[n \neq 2]$或对数場位$[n=2]$。卷积

$$T = E * S = S * E = \int S(y) E(x-y)\, dy$$

即相当于‘分布 S 所产生的場位’，$\Delta T=S$ 則是与古典的 Poisson 公式同形的式子，这里在 S 存在高度奇异性也不妨。例如設 S 是在有界范圍的——支集有界的——二重层(double layer)也可。

二重层的解釋 首先考慮置于 R^n 的超平面 $x_1=c$ 的具有面密度

$f(y)$ $[y=(x_2, \cdots, x_n)\in R^{n-1}$ 的局部可积函数$]$

的純量分布 μ_c。这解釋为，支集含于这个超平面的測度

$$\mu_c=\int_{x_1=c} f(x_2, \cdots, x_n)\delta_x dx_2\cdots dx_n$$

$$=\int_{R^{n-1}} f(y)\delta_{c,y}dy.$$

这个积分就是 §11 中的‘关于參数的积分’，也就是，对于 $\varphi\in(\mathfrak{D})_{R^n}$，

$$\mu_c(\varphi)=\int_{x_1=c} f(x_2, \cdots, x_n)\delta_x(\varphi)dx_2\cdots dx_n$$

$$=\int_{R^{n-1}} f(y)\varphi(c, y)dy.$$

所說置于超平面 $x_1=c$ 的二重层，則解釋为：象

$$S=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\mu_{c+\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon}\mu_c\right)$$

$$=\frac{d\mu_c}{dc} \quad [\text{关于參数 } c \text{ 的微分法}]$$

这样的极限。容易了解，

$$S=-\int_{R^{n-1}} f(y)\frac{\partial\delta_{c,y}}{\partial x_1}dy \quad [\text{关于參数的积分}]$$

实际就是这样的极限广义函数。最后一式可付与直观的意义：$-\frac{\partial\delta_{c,y}}{\partial x_1}$ 是具有平行于 x_1 軸的力矩而位于点 (c, y) 的偶极子[§6]，以面密度 $f(y)$ 将其集結起来的就是 S。一般超曲面上的二重层概念也将能够作为偶极子的积分而定义出来。还有，上述的 f 在 R^{n-1} 的支集如設为 A，S 的支集便能表为 $\{(c, y); y\in A\}$。

$\Delta T=S$ 的右端 $S\in(\mathfrak{E})'$ 如无显著的奇异性，上面的广义函数解 $T=E*S$ 就是普通意义的函数解，这就是說，是依从普通微分法使 Poisson 公式成立的函数。为观察其情况，要注意下列的事实。

如果局部可积函数 f 的某一阶微商广义函数 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 仍是局部可积函数的話，則 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ 就与普通的微商 $\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]$ 一致❶：参照定理 5.1。

下列定理是中間性的，在 §18 將进一步加以强化。所应注意的是，与其說是定理本身，毋宁說是其所由得来的依据。

定理 17.2 如 $S\in(\mathfrak{E})'$ 的一阶微系数 $\frac{\partial S}{\partial x_i}$ 都是可积函数的話，則 S 就也成为可积函数，同(17.2)的卷积 $E*S$ 以及微商广义函数

$$\frac{\partial E*S}{\partial x_i}=E*\frac{\partial S}{\partial x_i},\quad \frac{\partial^2 E*S}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial E}{\partial x_j}*\frac{\partial S}{\partial x_i}\tag{17.8}$$

都成为局部可积函数，从而(17.8)与普通的微商［到二阶为止］一致。

这是因为，E 及微商广义函数 $\frac{\partial E}{\partial x_j}$ 都是局部可积函数，所以(17.8)也如是，从而

$$S=\Delta E*S=\sum\frac{\partial^2 E*S}{\partial x_i\partial x_i}$$

也如是，又从而 $E*S$ 也如是。实际上，因 S 的支集有界，所以 S 可积——首先在其支集，从而在全空間 R^n。

§18 参函数与卷积

試將定理 17.2 作下述方向的强化：在广义函数 T 的 Laplace 算符 ΔT 沒有显著奇异性的地方，T 也沒有显著的奇异性。为此，修改 Δ 的基本解(17.2)，然后制作具有有界支集的参函数（parametrix）。这样的方法对于 Δ 以外的微分算子也时常有效。

一般，对于常系数的微分算子 D，δ 分解成

---

❶ 是作为广义函数的一致。从函数的角度看，則是几乎到处 $\frac{\partial f}{\partial x_i}=\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\right]$。

$$\delta = DW + \zeta, \quad W \in (\mathfrak{D})', \quad \zeta \in (\mathfrak{E}) \tag{18.1}$$

的形状时，W 叫做 D 的参函数。W'約略象似基本解'。这时，对于具有有界支集的广义函数 T，于 $T=\delta * T$ 的右端引用(18.1)，并参照公式(17.4)的話，T 就能分解为如下的形状：

$$T = DW * T + \zeta * T$$
$$= W * DT + \zeta * T, \quad \zeta * T \in (\mathfrak{E}). \tag{18.2}$$

若分解式的第一項 $DW*T = W*DT$ 是具有某种程度可微性的函数，則 T 也应如此。例如，$DT \in (\mathfrak{D})$时 $T \in (\mathfrak{E})$. 若 W 的支集有界的話，$\zeta = \delta - DW$ 的支集也有界而且 $\zeta \in (\mathfrak{D})$，于是(18.2) 可适用于任意的——支集不作限制——广义函数 T.

特别当 W 在原点之外成为 C^∞ 級函数[在 §7 所討論的'于开集上的性质']的时候，能够适当修改 W 使其支集成为有界。那就是，取如下的函数 γ，并作乘积 γW：

$$\gamma \in (\mathfrak{D}), \text{在原点 } 0 \text{ 的邻域 } \gamma(x) = 1.$$

γW 的支集含于 γ 的支集而且有界。$W - \gamma W$ 在整个空間 R^n 也成为 C^∞ 級函数。从而 $D(W - \gamma W)$ 也是 C^∞ 級函数，于是将此并入 ζ，把 γW 重新看做 W 卽可。

基本解是参函数的一种[$\zeta = 0$ 的場合]，因此，特别把 Δ 的基本解(17.2)作如上的修改，卽能得到支集为有界的参函数 γE：

$$\delta = \Delta(\gamma E) + \zeta, \quad \zeta \in (\mathfrak{D}). \tag{18.3}$$

且要注意下列性质。

(i) 因为 $E, \dfrac{\partial E}{\partial x_i}$ 都是局部可积函数，所以 γE,

$$\frac{\partial \gamma E}{\partial x_i} = \frac{\gamma \partial E}{\partial x_i} + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}\right) E$$

也都如此。这是因为支集有界，所以 $\gamma E, \dfrac{\partial \gamma E}{\partial x_i}$ 都是可积函数。

(ii) 任意給定原点的邻域 U 时，适当地取 γ，可使 γE 的支

集合于 U 内。这与下列的(iii)結合着使用。

(iii) 在一点 a 的 ε 邻域 $U(a:\varepsilon)$ 若有 $T_1=T_2$，則对支集含于 $U\left(0:\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 內的 S，

$$\text{在}\quad U\left(a:\frac{\varepsilon}{2}\right)\text{中}, S*T_1=S*T_2.$$

(iii) 的假定乃是 '$\varphi\in(\mathfrak{D})$ 的支集含于 $U(a:\varepsilon)$ 时必有 $T_1(\varphi)=T_2(\varphi)$'. $\varphi\in(\mathfrak{D})$的支集含于 $U\left(a:\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 的时候，可得 $S*T_1(\varphi)=S*T_2(\varphi)$ 如下。根据(7.13)及(7.14)可知 $\check{S}*\varphi$ 的支集含于 $U(a:\varepsilon)$ 內，因之

$$S*T_1(\varphi)=T_1(\check{S}*\varphi)=T_2(\check{S}*\varphi)=S*T_2(\varphi).$$

定理18.1 广义函数 T 的 Laplace 算符 ΔT 若在开集 Ω 成局部可积函数的話，T 及一阶微系数 $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ 都成为在 Ω 的局部可积函数。

所要証明的性质是局部性的：在各点 $a\in\Omega$ 的某邻域，T 及 $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ 都成为可积函数卽可。如取函数 $\alpha\in(\mathfrak{D})_\Omega$，卽取支集含于 Ω 的 $\alpha\in(\mathfrak{D})$，$\alpha\Delta T$ 則成为具有有界支集的可积函数[在全空間 R^n]。設此 α 在所考慮的点 $a\in\Omega$ 的邻域为1，姑且說

$$\text{在}\ U(a:\varepsilon)\ \text{上}\quad \alpha(x)=1.$$

又所取 γE，使其支集含于 $U\left(0:\frac{\varepsilon}{2}\right)$內。依据 γE 把 T 如(18.2)那样分解之，則得

$$T=(\gamma E)*\Delta T+(C^\infty\text{級函数}), \tag{18.4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}=\left(\frac{\partial\gamma E}{\partial x_i}\right)*\Delta T+(C^\infty\text{級函数}).$$

在 $U\left(a:\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 中，向右端的 ΔT 代入 $\alpha\Delta T$ 卽可：这是由于，在 $U(a:\varepsilon)$ 中 $\alpha\Delta T=\Delta T$ 的緣故。因为 $\alpha\Delta T$ 是 R^n 上的可积函数，所以将此代入的卷积，从而 T 及 $\frac{\partial T}{\partial x_i}$，在 $U\left(a:\frac{\varepsilon}{2}\right)$ 中都成为可积函数。 証毕

这个定理可局部化如下：T 纵然不是 R^n 上的广义函数，但如

在 Ω 上給定即可。其原因是，再一次取如上的 α，然后考虑 αT。αT 可視为 R^n 上的广义函数［参看§3末尾］，于是在 $U(a:\varepsilon)$ 中 $\alpha T=T$。这样就能把上列定理用于广义函数 αT 及开集 $U(a:\varepsilon)$，于是获知 T 及 $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ 在 $U(a:\varepsilon)$ 中的性質。

以下各定理也可用同样的方法局部化。

因为 $\Delta\dfrac{\partial T}{\partial x_i}=\dfrac{\partial \Delta T}{\partial x_i}$，由 ΔT 的 k 阶微系数的性质与上列定理同样可得 T 的 k 阶及 $k+1$ 阶微系微的性质。但关于这一点，将要举出更基本的定理。

定理 18.2 广义函数 T 所有的一阶微系数 $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ 如果在开集 Ω 都成为局部可积函数的話，T 本身也是局部可积函数。进一步，$\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ 都成为在 Ω 的局部有界❶函微的話，T 在 Ω 上就成为連續函数❷。

証明 現在把微分运算 $\Delta=\sum\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 分配于 γE 及 T，試写为

$$T=\sum_i\frac{\partial\gamma E}{\partial x_i}*\frac{\partial T}{\partial x_i}+(C^\infty\text{ 級函数})$$

取如前的 α，在所考虑的点 a 的邻域，把 $\alpha\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ 代入于右端的 $\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ 即可。$\alpha\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ 在 R^n 上可积，所以定理前半自明。在定理后半的条件下，$\alpha\dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ 成为有界函数。从而連續性由下列事实所保証。

引理 設 f 是具有有界支集的可积函数，g 是有界可測函数，則 $f*g$ 是連續函数。

---

❶ 在 Ω 各点的邻域有界。从而对于任意的有界閉集 $K\subset\Omega$，在 K 上有界［根据复盖定理］。

❷ 作为 Ω 上的广义函数的話，則与 Ω 上的某連續函数 h 一致。作为函数的話，則在 Ω 几乎到处 $T=h$。

为明确起見，这个引理也予以証明。对任意的 x，显見地，有限积分

$$f*g(x)=\int f(x-y)g(y)dy$$

确定。要注意，設 $|g(y)|\leqslant M=\text{const}$ 就有

$$|f*g(x)-f*g(a)|\leqslant M\cdot\|\tau_x f-\tau_a f\|.$$

但 $\|f\|$ 是 (L^1) 范数：

$$\|f\|=\int|f(y)|dy.$$

当 $x\to a$ 时 $\|\tau_x f-\tau_a f\|\to 0$，就能获知 $f*g$ 的連續性。取輔助函数 $\varphi\in(C)$，并且利用

$$\begin{aligned}\|\tau_x f-\tau_a f\|&\leqslant\|\tau_x f-\tau_x\varphi\|+\|\tau_x\varphi-\tau_a\varphi\|+\|\tau_a\varphi-\tau_a f\|\\&=2\|f-\varphi\|+\|\tau_x\varphi-\tau_a\varphi\|.\end{aligned}$$

如取适当的 φ，可使 $\|f-\varphi\|$ 充分小[积分論的基本定理]。因 φ 一致連續，所以 $x\to a$ 时 $\|\tau_x\varphi-\tau_a\varphi\|$ 也充分小。因此即得所要証明的收斂 $\|\tau_x f-\tau_a f\|\to 0$。

再次，利用引理，不难得到关于 T 成为連續函数的又一充分条件。把"在 R^n 中的 Heaviside 函数 $Y(x)$"定义为 $Y(x_1),\cdots,Y(x_n)$ 的乘积：

$$Y(x)=Y(x_1,\cdots,x_n)=Y(x_1)Y(x_2)\cdots Y(x_n).\qquad(18.5)$$

这显見是 $\dfrac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}$ 的基本解。如乘以前見的 γ，即得具有有界支集的参函数 γY：

$$T=(\gamma Y)*\frac{\partial^n T}{\partial x_1\cdots\partial x_n}+(C^\infty\text{ 級函数}).$$

这样，γY 就成为有界函数。由此可見，如前地使用引理，即得如下的結果。

定理 18.3　若 $\dfrac{\partial^n T}{\partial x_1\cdots\partial x_n}$ 在开集 Ω 中成为局部可积函数，则 T 就是在 Ω 中的連續函数。

系　如果 T 的各阶微系数全都成为在 Ω 中的局部可积函数，那末就有 $T\in(\mathfrak{E})_\Omega$。

$(\mathfrak{E})_\Omega$ 表示 Ω 上 C^∞ 級函数的全体。其拓扑是与 §8 末尾的

$(\mathfrak{E})$的拓扑同样，唯取含于 Ω 的有界閉集 K，以基本拟范数系 $\{\rho_K^p\}$ 定义之。收斂 $\varphi_j\to\varphi$ in$(\mathfrak{E})_\Omega$ 是，各阶微系数的

在 Ω 广义一致的[于各 $K\subset\Omega$ 一致]收斂

$D^p\varphi_j(x)\to D^p\varphi(x)$.

返回到 Poisson 方程 $\Delta T=S$，根据定理 18.2，定理 18.3 以及引理容易作出定理 18.1 的变形。例如 S 的一阶微系数全都在 Ω 上成为局部有界可測函数的話，T 就成为在 Ω 上的 C^2 級函数，就是二回連續可微的函数：參照(18.4)，作为极端的情形，有

定理 18.4 以 $\varphi\in(\mathfrak{E})_\Omega$ 为右端的 Poisson 方程 $\Delta T=\varphi$ 的广义函数解[在 Ω 上]全都成为 $T\in(\mathfrak{E})_\Omega$。同方程的解的系 T_j 如在 $(\mathfrak{D})'_\Omega$ 收斂，則 T_j 在$(\mathfrak{E})_\Omega$ 收斂。

所要証明的仅是收斂的关系問題。但这也是局部性的：在 Ω 各点的邻域一致收斂的函数系在 Ω 广义地一致收斂。因此，如仅处理 $\Omega=R^n$ 的情形，根据以前局部化的方法，就能获知一般的情形。設 $\Omega=R^n$，把相当于(18.4)的分解适用于 T_j，这样就有

$$T_j=(\gamma E)*\Delta T_j+\zeta*T_j=(\gamma E)*\varphi+\zeta*T_j.$$

如于 §12 末尾所見，$\zeta*T_j$ 在$(\mathfrak{E})$收斂，因之 T_j 也如是。 証毕

特别关于解的序列 T_j $[j=1,2,\cdots]$，根据强收斂定理，从作为 Ω 上的广义函数列的单純收斂

$$T_j(\psi)=\int_\Omega T_j(x)\psi(x)dx\to T(\psi)\quad[\psi\in(\mathfrak{D})_\Omega]$$

可以推断 $T_j\to T$ in$(\mathfrak{E})_\Omega$.

§19 迭次 Laplace 算符的基本解

作为 Laplace 算符 Δ 的基本解，仅仅二維[空間]的对数場位似乎是独特的东西，然而以 λ 微分 $|x|^{\lambda-2}$ 且置 $\lambda=2$ 即得 $\log|x|$，因之必然能設想其間有什么內在的联系。于是考虑 R^n 上的 M.

Riesz 的一般場位 $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda \log|x|$。但設 λ 为复值的参数,并取由此产生的一般为多值的 $|x|^\lambda$ 的'主枝':

$$|x|^\lambda = \exp(\lambda \log|x|), \quad \log|x| \text{ 为实数。}$$

当 λ 的实部 $\Re\lambda > -n$ 时,而且仅在此时,这些一般場位在 R^n 上局部可积。特别考虑 $\Re\lambda > 2-n$ 的情形。这时一阶微商广义函数与微商一致,例如已知

$$\frac{\partial|x|^\lambda}{\partial x_i} = \lambda|x|^{\lambda-1}\frac{x_i}{|x|},$$

进一步,

$$\frac{\partial^2|x|^\lambda}{\partial x_i^2} = \lambda(\lambda-1)|x|^{\lambda-2}\frac{x_i^2}{|x|^2} + \lambda|x|^{\lambda-2}\frac{|x|^2 - x_i^2}{|x|^2},$$

$$\Delta|x|^\lambda = \lambda(\lambda+n-2)|x|^{\lambda-2}. \tag{19.1}$$

命 k 为自然数,使 Δ 继續作用于 $|x|^{2k-n}$ 好多回,截止到 $k-1$ 回使用(19.1),在第 k 回則是

$$\Delta^k|x|^{2k-n} = \Delta\Delta^{k-1}|x|^{2k-n} = 2^{k-1}(k-1)!\,a\Delta|x|^{2-n},$$

$$a = (2k-n)\cdots(4-n) \quad [\text{因子每次减二}].$$

$2k-n$ 为偶数 $\geqslant 0$, 則 $a=0[n>2]$ 或 $\Delta|x|^{2-n}=0[n=2]$.

$2k-n$ 不成偶数 $\geqslant 0$ 則 $n\neq 2$, 这时于

$$\Delta^k|x|^{2k-n} = \left(2^{k-1}(k-1)!\frac{a}{e_n}\right)\delta \tag{19.2}$$

的右端 δ 的系数 $\neq 0$. 以此系数除 $|x|^{2k-n}$ 即成迭次 Laplace 算符 Δ^k 的基本解,于是可得下列定理中的 $A_{n,k}|x|^{2k-n}$.

定理 19.1 对应維数 n 与自然数 k 取适当的常数 $A_{n,k}$ 以及 $B_{n,k}$, 可使 R^n 上的局部可积函数

$$E = \begin{cases} A_{n,k}|x|^{2k-n} & [2k-n \text{ 不是偶数} \geqslant 0 \text{ 时}], \\ B_{n,k}|x|^{2k-n}\log|x| & [2k-n \text{ 是偶数} \geqslant 0 \text{ 时}] \end{cases} \tag{19.3}$$

成为 Δ^k 的基本解。

关于 $2k-n$ 是偶数 $\geqslant 0$ 的情形,可依据在其他方面也能致用

的 Riesz 的解析开拓的思想得之。这时，恰如由 (19.2) 的系数所类推的那样，γ 函数在計算上有效地被利用着。

注意 19.1 与此平行地可以处理 $2k-n$ 不是偶数 $\geqslant 0$ 的情形。这时关于 Δ 的基本解的知識以及 Green 公式等都不需要了。$A_{n,k}$ 与 $B_{n,k}$ 皆都表为同形的式子

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Big/\left(2^k(k-1)!\sqrt{\pi^n}\,(2k-n)(2k-2-n)\cdots\hat{0}\cdots(2-n)\right).$$

但其中的 $\hat{0}$ 表示因子中如出現 0 的話就把它排除掉。

$\Re\lambda>-1$ 时，把 $x\in R^1$ 的函数 $|x|^\lambda$, $|x|^\lambda\log|x|$ 在 $x<0$ 調換为 0，又能得到局部可积函数 $x^\lambda Y(x)$, $x^\lambda\log x\cdot Y(x)$。其一阶微商广义函数也当 $\Re\lambda>0$ 时与微商一致，特别有

$$\frac{d}{dx}x^\lambda Y=\lambda x^{\lambda-1}Y\quad[\Re\lambda>0];\tag{19.4}$$

試与 $\lambda=0$ 的情形 $[Y'=\delta]$ 比較一下。使之作用于 $\varphi\in(\mathcal{D})$，就有

$$\langle x^\lambda Y,\varphi\rangle=\int_0^\infty x^\lambda\varphi(x)\,dx;$$

对于 $S\in(\mathcal{D})'$ 与 $\varphi\in(\mathcal{D})$，會經說过，把 $S(\varphi)$ 也能写成 $\langle S,\varphi\rangle$，上式在积分号下能就参数微分，于是

$$\frac{d}{d\lambda}\langle x^\lambda Y,\varphi\rangle=\langle x^\lambda\log x\cdot Y,\varphi\rangle.\tag{19.5}$$

R^1 上的广义函数 $x^\lambda Y$ 对于 $\Re\lambda>-1$ 范围的 λ 则与正則[一价解析] 对应，也就是說，先把 φ 固定了，$\langle x^\lambda Y,\varphi\rangle$ 就成为 λ 的正則函数，这是因为关于复变数 λ 能作如 (19.5) 那样的微分。γ 函数 $\Gamma(\lambda)$ 决不为 0，又在 $\Re\lambda>0$ 为正則，所以广义函数

$$Y_\lambda=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}x^{\lambda-1}Y\quad[\Re\lambda>0]\tag{19.6}$$

也关于 λ 正則地对应。于此引用 γ 函数的基本公式

$$\Gamma(\lambda+1)=\lambda\Gamma(\lambda)$$

以及 (19.4)，即得

$$\frac{d}{dx}Y_{\lambda+1}=Y_\lambda, \tag{19.7}$$

这就是說，$-Y_{\lambda+1}(\varphi')=Y_\lambda(\varphi)$。两端就 λ 尽量作解析开拓时，这个等式保持不变，从而，正則的对应 $\lambda\Rightarrow Y_\lambda\in(\mathfrak{D})'$ 乃从 λ 的复数半平面 $\Re\lambda>0$ 出发，依次开拓于 $\Re\lambda>-1$, $\Re\lambda>-2,\cdots$。这样就能得到关于复数全平面的 λ 的正則函数 Y_λ，于是(19.7)无限制地成立。特別是，首先利用(19.6)，其次利用(19.7)，卽得

$$Y_1=Y,\ Y_{-p}=\delta^{(p)}\quad[p=0,1,2,\cdots]. \tag{19.8}$$

注意 19.2 包含参数 λ 的广义函数 $\Gamma(\lambda+1)\,Y_{\lambda+1}$ 乃是 $x^\lambda Y$ 的'容許极'的解析开拓，与此同时，$x^\lambda\log x\cdot Y$ 也能解析开拓[参照(19.5)]。这将于次节詳述。

重返于一般的 R^n，留意与(19.5)同样意义下的

$$\frac{d}{d\lambda}|x|^\lambda=|x|^\lambda\log|x|\quad[\Re\lambda>-n]. \tag{19.9}$$

这不是普通的微分法，而是广义函数关于参数的微分法 $\frac{dS_\lambda}{d\lambda}$：实际在考虑

$$\left(\frac{d}{d\lambda}S_\lambda\right)(\varphi)=\frac{d}{d\lambda}(S_\lambda(\varphi))\quad[S_\lambda\in(\mathfrak{D})',\ \varphi\in(\mathfrak{D})];$$

参照 §11 末尾。还要注意公式

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{d}{d\lambda}S_\lambda=\frac{d}{d\lambda}\frac{\partial}{\partial x_i}S_\lambda, \tag{19.10}$$

$$\frac{d}{d\lambda}(f(\lambda)S_\lambda)=f'(\lambda)S_\lambda+f(\lambda)\frac{d}{d\lambda}S_\lambda; \tag{19.11}$$

使各端作用于 $\varphi\in(\mathfrak{D})$，按照定义依次变形，容易驗証这些公式成立。現因存在可微性(19.9)，所以包含参数 λ 的广义函数 $|x|^\lambda$，从而还有

$$R_\lambda=\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\right)|x|^\lambda\quad[\Re\lambda>-n]$$

都是关于 λ 的正则函数。特别是 R_λ 与 Y_λ 同样，且能正则地开拓于复数 λ 的全平面。为了明确这一点，利用当 $\Re\lambda>2-n$ 时由 (19.1) 所导出的

$$\Delta R_\lambda=2\lambda R_{\lambda-2}. \tag{19.12}$$

根据此式，R_λ 依次延伸向复数 λ 平面的左方。$n=2$ 时 (19.12) 的 λ 所以能平妥地通过 0，是由于 $\Delta R_0=0$ [由定义可見的明显性质]：詳細說，如 §11 末尾在 $\lambda=0$ 的周圍，R_λ 可展为

$$R_\lambda=R_0+\lambda A_1+\lambda^2A_2+\cdots\quad[A_\nu\in(\mathfrak{D})'],$$

根据 (19.12) 卽得

$$R_{\lambda-2}=\frac{\Delta}{2}(A_1+\lambda A_2+\cdots),\quad R_{-2}=\frac{\Delta}{2}A_1.$$

如是 (19.12) 无限制地成立。

其次，对于 $\varphi\in(\mathfrak{D})=(\mathfrak{D})_{R^n}$，考虑单位超球面上的面积分

$$M_\varphi(t)=\int_{|x|=1}\varphi(tx)d\omega_x\quad[d\omega_x\text{ 是面元素}],$$

于是 $\langle|x|^\lambda,\varphi\rangle$ 可表为

$$\int|x|^\lambda\varphi(x)dx=\int_0^\infty t^{\lambda+n-1}M_\varphi(t)dt\quad[\Re\lambda>-n].$$

容易了解，作为 t 的函数 $M_\varphi\in(\mathfrak{D})_{R^1}$，因之，右端可写成 $\langle t^{\lambda+n-1}Y,M_\varphi\rangle$，从而又可写成 $\Gamma(\lambda+n)Y_{\lambda+n}(M_\varphi)$。故

$$R_\lambda(\varphi)=\left(\frac{\Gamma(\lambda+n)}{\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)}\right)Y_{\lambda+n}(M_\varphi). \tag{19.13}$$

这是作为 $\Re\lambda>-n$ 而得到的，然当 $\lambda\to-n$ 时右端的 γ 函数之比收斂于 $\frac{1}{2}$ [参看下列注意]，因此，

$$R_{-n}(\varphi)=\frac{1}{2}Y_0(M_\varphi).$$

于此如参看 (19.8) 及 M_φ 的定义，则有

$$Y_0(M_\varphi)=M_\varphi(0)=c\cdot\varphi(0),$$

$$c=\int_{|x|=1}d\omega_x=\frac{2\sqrt{\pi^n}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)};\qquad(19.14)$$

故

$$R_{-n}=\frac{1}{2}c\delta.\qquad(19.15)$$

注意 19.3　如所周知，$\Gamma(\lambda)$是以 $\lambda=0, -1, -2, \cdots$ 为一阶的极〔从而比的极限值 $\frac{1}{2}$ 不証自明〕，此外在复数全平面上成正则。因此，依据两端的解析性(19.13)也无限制地成立：凡右端无意义的点仅是‘可除奇点’。

至此，准备已完成。設 $2k-n$ 为偶数$\geqslant 0$，計算 $\Delta^k|x|^{2k-n}\log|x|$ 时，使用

$$\Delta^k|x|^\lambda\log|x|=\frac{d}{d\lambda}\Delta^k|x|^\lambda\quad[参看(19.9), (19.10)]。$$

利用 R_λ 最初的定义，并参看(19.12)，即得

$$\Delta^k|x|^\lambda=\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)\Delta^k R_\lambda=\Gamma\left(\frac{\lambda+n}{2}\right)\cdot 2^k f(\lambda)R_{\lambda-2k},$$

$$f(\lambda)=\lambda(\lambda-2)\cdots(\lambda-2k+2).$$

将此結果写成 $\Delta^k|x|^\lambda=f(\lambda)S_\lambda$，然后对 λ 微分之，即得

$$\Delta^k|x|^\lambda\log|x|=f'(\lambda)S_\lambda+f(\lambda)\frac{d}{d\lambda}S_\lambda\quad[参看(19.11)]。$$

因 $2k-n$ 是偶数 $\geqslant 0$，所以 $f(2k-n)=0$，而

$$\begin{aligned}\Delta^k|x|^{2k-n}\log|x|&=f'(2k-n)\cdot 2^k\Gamma(k)R_{-n}\\&=f'(2k-n)\cdot 2^{k-1}c\Gamma(k)\cdot\delta.\end{aligned}$$

因为 $f'(2k-n)\neq 0$ 显然成立[1]，所以置

$$B_{n,k}=\frac{1}{[f'(2k-n)\cdot 2^{k-1}c\Gamma(k)]}$$

时即得 Δ^k 的基本解 $B_{n,k}|x|^{2k-n}\log|x|$.

---

[1] 把 $f'(2k-n)$ 用乘积的微分法展开之，仅一项之外皆为 0,

$$f'(2k-n)=(-1)^{m-1}2^{k-1}(k-m)!(m-1)!\qquad\left[m=\frac{n}{2}\right].$$

§ 20 解析开拓与拟函数

以解析开拓为媒介，对某种非局部可积函数，也能使适当的广义函数与之对应。适逢前节出現了好的例子，际此机会，将要說明其方法。

关于在 R^1 上把 $x^\lambda Y$ 可看作广义函数的情形，即关于 $\Re\lambda>-1$ 的情形，从前节的 Y_λ 所得的广义函数

$$S_\lambda=\Gamma(\lambda+1)Y_{\lambda+1}$$

与 $x^\lambda Y$ 一致。然而 S_λ 这一面，除去

$$\lambda=-1,-2,\cdots\quad[\text{負整数}]\tag{20.1}$$

正則地对应于一切的复数 λ；此外，无論怎样地选取 $\varphi\in(\mathcal{D})$，在 (20.1) 处作为 λ 的函数 $S_\lambda(\varphi)$，至多具有一阶的极［起因于系数 $\Gamma(\lambda+1)$］。实际上就是在正則点处使 S_λ，而在(20.1) 处使适当修改了的 S_λ'，与不必是局部可积的 $x^\lambda Y$ 对应。

少許一般地，試考察关于复值参数 λ 的正則的对应 $\lambda\Rightarrow S_\lambda\in(\mathcal{D})'_{R^n}$。概括的說，即 λ 的'广义函数值的正則函数'。其'正則性'实际是，当它作用于任意的 $\varphi\in(\mathcal{D})$ 时 $S_\lambda(\varphi)$ 乃是普通意义的 λ 的正則函数。从而

$$\frac{\partial S_\lambda}{\partial x_i};\quad \frac{\partial S_\lambda}{\partial x_i}(\varphi)=-S_\lambda\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)$$

也仍是广义函数值的正則函数。已知关于参数的微系数 $\dfrac{dS_\lambda}{d\lambda}$ 也是如此［§ 11 末尾］。函数論中的基本定理，例如解析开拓的唯一性等也都容易轉移到广义函数值的正則函数的情形。

其次，如同关于 $\Gamma(\lambda+1)Y_{\lambda+1}$ 的 (20.1)，考虑 S_λ 以 $\lambda=\lambda_0$ 为'至高 m 阶的极'的情形。其意义如下：

S_λ，除 $\lambda=\lambda_0$ 之外，在 λ_0 的邻域正則。不論取怎样的 $\varphi\in(\mathcal{D})$，λ 的函数 $S_\lambda(\varphi)$ 以 $\lambda=\lambda_0$ 为至高 m 阶的极。［当然 S_λ 含

$\lambda=\lambda_0$ 在内成正則也可。]

这时，根据普通函数論的方法，对于接近于0的 $\varepsilon\neq0$ [ε 也是复值参数]，可以得到如

$$S_{\lambda_0+\varepsilon}=\varepsilon^{-m}A_{-m}+\cdots+A_0+\varepsilon A_1+\varepsilon^2A_2+\cdots \tag{20.2}$$

的采用广义函数系数 $A_j\in(\mathcal{D})'$ 的'在极附近的展开'。事实上，首先規定

$$T_\varepsilon=\varepsilon^m S_{\lambda_0+\varepsilon}\ [\varepsilon\neq0],\quad T_0(\varphi)=\lim_{\varepsilon\to0}T_\varepsilon(\varphi),$$

就这个 T_ε 説，$\varepsilon=0$ 也是正則点[按照单純收斂定理，T_0 也是广义函数]。把这个 T_ε 按照 § 11 末尾那样展开，卽得(20.2)。并且，展开的唯一性則归結于普通的函数論。

前見之例 $S_\lambda=\Gamma(\lambda+1)Y_{\lambda+1}$ 可視为 $x^\lambda Y$ 在 $\Re\lambda>-1$ 的，容許极的解析开拓。根据这种性质，依据解析开拓的唯一性，S_λ 可在(20.1)以外唯一确定。这样，給定(20.1)以外的 λ 时，R^1 上的这个广义函数 S_λ 叫做 $x\in R^1$ 的**拟函数** (pseudo-function $x^\lambda Y$)，附加拟函数的記号 Pf 表示之❶：对于不是整数<0的 λ，

$$\mathrm{Pf}\,x^\lambda Y=\mathrm{Pf}\,x^\lambda Y(x)=\Gamma(\lambda+1)Y_{\lambda+1}. \tag{20.3}$$

根据解析开拓的唯一性，对于不是整数 $\leqslant0$ 的 λ，微分法的公式

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Pf}\,x^\lambda Y=\lambda\,\mathrm{Pf}\,x^{\lambda-1}Y \tag{20.4}$$

成立：事实上，$\Re\lambda>0$ 时記号 Pf 則不需要，而且两端一致，因此，只要两端的正則性能得到保証，上列关系就必保持成立。

其次处理(20.1)。給定(20.1)的 λ 时，S_λ 虽不能确定，但关于接近于0的 $\varepsilon\neq0$ 的展开

$$S_{\lambda+\varepsilon}=\varepsilon^{-1}A_{-1}+A_0+\varepsilon A_1+\cdots$$

則确定。关于(20.1)以外的 λ，如視为 $A_{-1}=0$，則得許可 $\varepsilon=0$ 的同形的展开，(20.3)卽成

❶ 記号 Pf 是由有穷部分 Partie finie 得来。——校者注

$$\mathrm{Pf}\, x^{\lambda} Y = A_0. \tag{20.5}$$

于是，对任意的 λ，重新把(20.5)作为一般拟函数 $x^{\lambda} Y$ 的定义。这样作，就連在(20.1)拟函数也确定了。現在闡明(20.1)实际就是极，也就是說‘主部’$\varepsilon^{-1} A_{-1}$ 不消失。与此同时，微分法的公式(20.4)也要修改。

首先一般地，把依存于 λ 的 A_{-1} 写为 B_{λ}。上列展开乃是就左端成正則的范圍考虑的，因之左端为 $\mathrm{Pf}\, x^{\lambda+\varepsilon} Y$；再如参照(20.5)，展开可改写为

$$\mathrm{Pf}\, x^{\lambda+\varepsilon} Y = \varepsilon^{-1} B_{\lambda} + \mathrm{Pf}\, x^{\lambda} Y + \varepsilon A_1 + \cdots. \tag{20.6}$$

同理，引用(20.4)，则有

$$\frac{d}{dx} \mathrm{Pf}\, x^{\lambda+\varepsilon} Y = (\lambda+\varepsilon)\, \mathrm{Pf}\, x^{\lambda-1+\varepsilon} Y.$$

若把此式右端的拟函数再仿照(20.6)展开，则得关于微商拟函数的展开

$$\frac{d}{dx} \mathrm{Pf}\, x^{\lambda+\varepsilon} Y = \varepsilon^{-1} \lambda B_{\lambda-1} + (\lambda \mathrm{Pf}\, x^{\lambda-1} Y + B_{\lambda-1})$$

$$+ (\varepsilon \text{ 的高次項的和}).$$

另一方面，因为(20.6)也可就 x 逐項微分[§ 11]，所以根据展开的唯一性得

$$\frac{d}{dx} B_{\lambda} = \lambda B_{\lambda-1}; \quad \frac{d}{dx} \mathrm{Pf}\, x^{\lambda} Y = \lambda \mathrm{Pf}\, x^{\lambda-1} Y + B_{\lambda-1}.$$

这个 $\mathrm{Pf}\, x^{\lambda} Y$ 的微分公式与极的主部相关。但对第二式，特别置 $\lambda=0$，则其右端第一項消失

$$B_{-1} = \frac{d}{dx} \mathrm{Pf}\, x^0 Y = \frac{d}{dx} x^0 Y = \frac{d}{dx} Y = \delta.$$

从 $\lambda=-1$ 依次使用上列第一式，即得

$$B_{-k} = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \delta^{(k-1)} \quad [k=1,2,3,\cdots].$$

这样一来，对于极 $\lambda=-k$，就得到展开的起首部分及微分公式：对

于 $k=1, 2, 3, \cdots$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Pf}\,x^{-k+\varepsilon}Y &= \varepsilon^{-1}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\delta^{(k-1)}+\mathrm{Pf}\,x^{-k}Y+\cdots,\\ \frac{d}{dx}\,\mathrm{Pf}\,x^{-k}Y &= -k\,\mathrm{Pf}\,x^{-k-1}Y+\frac{(-1)^k}{k!}\delta^{(k)}.\end{aligned}\right\} \tag{20.7}$$

并且，相当于普通微分公式的有

$$\frac{d}{dx}\log x\cdot Y=\mathrm{Pf}\,x^{-1}Y. \tag{20.8}$$

(20.8)的証明 广义函数的正則函数 S_λ 的展开能写成

$$S_{\lambda+\varepsilon}=S_\lambda+\frac{\varepsilon}{1!}\frac{d}{d\lambda}S_\lambda+\frac{\varepsilon^2}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}S_\lambda+\cdots,$$

然因 $x^\lambda Y\ [\Re\lambda>-1]$ 可就 λ 作普通的微分运算，所以

$$x^\varepsilon Y=Y+\varepsilon\log x\cdot Y+\cdots.$$

两端若就 x 微分，且以 ε 除之，卽成 $\mathrm{Pf}\,x^{-1+\varepsilon}Y$ 的展开，因此(20.8)得以証明。

从在 $\Re\lambda>-1$ 的 $x^\lambda\log x\cdot Y$ 作容許极的解析开拓，与前同样，根据

$$(\text{拟函数})=(\text{解析开拓})-(\text{极的主部}), \tag{20.9}$$

能够定义 $\mathrm{Pf}\,x^\lambda\log x\cdot Y$。这个解析开拓，对于不是負整数的 λ，作为正則的

$$\frac{d}{d\lambda}\mathrm{Pf}\,x^\lambda Y=\mathrm{Pf}\,x^\lambda\log x\cdot Y$$

而給出，从而 $\lambda=-1,-2,-3,\cdots$ 都成为二阶的极［主部仅是 ε^{-2} 的項］。同样，关于

$$(x-a)^\lambda Y(x-a),\quad |x-a|^\lambda Y(a-x),\quad |x|^\lambda\log|x|,$$

或是在此乘以 C^∞ 級函数等，也能規定拟函数。特别是导入以整数 m 为指数的拟函数

$$\mathrm{Pf}\,x^m=\mathrm{Pf}\,x^mY(x)+(-1)^m\mathrm{Pf}\,|x|^mY(-x),$$

則不带修訂項地成立着

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Pf}\,x^m=m\,\mathrm{Pf}\,x^{m-1}.$$

这是(20.7)再加上該式关于$\mathrm{Pf}|x|^m Y(-x)$作反轉σ而得的結果。还有相当于(20.8)的是

$$\frac{d}{dx}\log|x| = \mathrm{Pf}\, x^{-1}.$$

更一般地，关于R^n上具有复值参数λ的函数f_λ，也将有按照(20.9)能定义拟函数的情形。特别是在$f_\lambda(x)=|x|^\lambda[x\in R^n]$等类的情形下，因有前节所用的很方便的广义函数等式，所以能在复数全平面作单值的解析开拓。特別是在正則点的

$$\Delta\, \mathrm{Pf}\,|x|^\lambda = \lambda(\lambda+n-2)\,\mathrm{Pf}\,|x|^{\lambda-2}$$

之外，还产生了在极使用(20.7)的方法計算出来的修訂項。

§ 21 广义函数的阶数，构造定理

广义函数的概念，首先是以連續函数的自由微分法为目的而导入的。可以証明，至少在局部性問題中，并未出現对此目的不必要的东西[构造定理]。作为准备虽嫌过繁，但为明了实际情况，在此导入广义函数的阶数概念还是必要的。

在$(\mathfrak{D})$与(C)之間，$(\mathfrak{E})$与$(\mathfrak{E}^0)$之間，按可微性的程度可引入各种各样的函数族。首先，空間X上的C^m級函数[m回連續可微]的全体表为$(\mathfrak{E}^m)_X$；特别有$(\mathfrak{E}^\infty)_X=(\mathfrak{E})_X$。設$K$为$X$中的有界閉集，仿照$(\mathfrak{D})$或$(C)$的情形，置

$$(\mathfrak{D}_K^m)=\{\varphi;\ \varphi\in(\mathfrak{E}^m)_X,\ \mathrm{Car}(\varphi)\subset K\},$$

$$(\mathfrak{D}^m)_X=\bigcup_K(\mathfrak{D}_K^m) \qquad [考虑所有的\ K].$$

在以X的开集Ω为基础的空間制作$(\mathfrak{D}^m)_\Omega$时，令$\varphi\in(\mathfrak{D}^m)_\Omega$在$\Omega$之外为0，并看作$\varphi\in(\mathfrak{D}^m)_X$。在这种意义下，就有$(\mathfrak{D}^m)_\Omega\subset(\mathfrak{D}^m)_X$。但$(\mathfrak{E}^m)_\Omega$不能如是了解。暂且把基础空間$X$固定，并略去下标$X$。特别有$(\mathfrak{D}^\infty)=(\mathfrak{D})$，$(\mathfrak{D}_K^\infty)=(\mathfrak{D}_K)$，但对于$m<\infty$，把

$$\rho_m:\ \rho_m(\varphi)=\max_{|p|\le m}\|D^p\varphi\|_\infty$$

作为唯一的基本范数来规定 $(\mathfrak{D}_K^m)$ 的拓扑。利用这一点，与 $(\mathfrak{D})$ 的情形相同，可以规定伪收斂与拓扑；这无須詳述了。于是在 $(\mathfrak{D})$ 与 (C) 之間可引入族列

$$(\mathfrak{D})=(\mathfrak{D}^\infty)\prec\cdots\prec(\mathfrak{D}^2)\prec(\mathfrak{D}^1)\prec(\mathfrak{D}^0)=(C),$$

而且 $(\mathfrak{D})$ 在各 $(\mathfrak{D}^m)$ 中稠密。从而[定理 10.1 及定理 12.1 系 2] 其共軛空間关于强拓扑可列成

$$(C)'=(\mathfrak{D}^0)'\prec(\mathfrak{D}^1)'\prec(\mathfrak{D}^2)'\prec\cdots\prec(\mathfrak{D}^\infty)'=(\mathfrak{D})'.$$

某 $S\in(\mathfrak{D})'$ 所以能看作 $S\in(\mathfrak{D}^m)'$，$m<\infty$，乃是該 S 在各 $(\mathfrak{D}_K)$ 具有在 $(\mathfrak{D}_K^m)$ 的拓扑的連續性

$$|S(\varphi)|\leqslant a_K\rho_m(\varphi)\quad[a_K=\text{const},\ \varphi\in(\mathfrak{D}_K)]$$

的情形。系数 a_K，如在 R^1 上的

$$S=\sum_{\nu=1}^{\infty}\nu\cdot\tau_\nu\delta^{(m)}=\sum\nu\cdot\delta^{(m)}(x-\nu)$$

所表明的，应与集 K 相关。广义函数 S 成为 $S\in(\mathfrak{D}^m)'$，$m\leqslant\infty$ 时，就說 S 的阶数 $\leqslant m$；这个 m 的最小值叫做 S 的阶数。阶数为 0 的广义函数就是测度。作为阶数 ∞ 的例子，有 R^1 上的

$$S=\sum_{\nu=1}^{\infty}\tau_\nu\delta^{(\nu)};$$

若将 τ_ν 省掉，則級数不收斂。

于 $(\mathfrak{E}^m)$，把对应于所有有界閉集 $K[\subset X]$ 及 $\|p\|\leqslant m$ 的

$$\rho_K^p:\ \rho_K^p(\varphi)=\max_{x\in K}|D^p\varphi(x)| \tag{21.1}$$

設为基本拟范数。那种对 p 不加限制的曾取作 $(\mathfrak{E})$ 的基本拟范数系。現在則只取可数个 K 就够了，于是 $(\mathfrak{E}^m)$ 可以距离化。又

$$(\mathfrak{E})=(\mathfrak{E}^\infty)\prec\cdots\prec(\mathfrak{E}^2)\prec(\mathfrak{E}^1)\prec(\mathfrak{E}^0),$$

而 $(\mathfrak{D})$ 稠密地 $\prec(\mathfrak{E}^m)$。故 $(\mathfrak{E}^m)'\prec(\mathfrak{D})'$，

$$(\mathfrak{E}^0)'\prec(\mathfrak{E}^1)'\prec(\mathfrak{E}^2)'\prec\cdots\prec(\mathfrak{E}^\infty)'=(\mathfrak{E})'.$$

定理 21.1 $(\mathfrak{E}^m)'$ 是阶数 $\leqslant m$ 而支集有界的广义函数的全体。

各 $S\in(\mathfrak{E})'$ 的阶数有限，即

$$(\mathfrak{E})'=\bigcup_{m<\infty}(\mathfrak{E}^m)'.$$

前半与定理10.2完全同样。关于后半，S 被有限个的 p_K^k 所控制，对于在这里面所用的 $\|p\|$ 的最大值 m，S 的阶数 $\leqslant m<\infty$。

若 $S\in(\mathfrak{D}^m)'$，则在基础空間 X 的开集 Ω 局部化［§7 起首部分］了的广义函数 S 属于 $(\mathfrak{D}^m)'_\Omega$。然而即使 $S\in(\mathfrak{E}^m)'$，局部化了的 S 也不必属于 $(\mathfrak{E}^m)'_\Omega$。所謂属于 $(\mathfrak{E}^m)'_\Omega$，乃是原来的 S 的支集含于 Ω 的情形。这时，对于任意的 $\varphi\in(\mathfrak{E}^m)_X$ 的 $S(\varphi)$ 则与把 φ 看做 Ω 上的函数——詳細地說，就是把定义范圍縮小为 Ω 的 $\varphi\in(\mathfrak{E}^m)_\Omega$——时的 $S(\varphi)$ 一致❶。从而有

定理 21.2 假設已給出包含 $S\in(\mathfrak{E}^m)'$ 的支集的开集 Ω。$\varphi_j\in(\mathfrak{E}^m)$ 作为 Ω 上的函数，若 $\varphi_j\to0$ in $(\mathfrak{E}^m)_\Omega$，則 $S(\varphi_j)\to0$。

今設基础空間 X 为 Euclid 空間 R^n，把 $S\in(\mathfrak{D}^m)'$ 及 $\varphi\in(\mathfrak{D}^m)$ 都看成广义函数，試作 §13 的卷积。已知，当 $\varphi\in(\mathfrak{D})$ 时，卷积实际就是函数

$$S*\varphi(x)=S(\tau_x\sigma\varphi).$$

这容易扩充到一般的 $\varphi\in(\mathfrak{D}^m)$，卷积虽是連續函数，但在 $m<\infty$ 时不能保証卷积的可微性。关于 $S\in(\mathfrak{E}^m)'$ 及 $\varphi\in(\mathfrak{E}^m)$ 也是同样。借用这个性质将給出广义函数的构造定理之一。作为簡单的情形，試考察偏微分

$$\frac{\partial}{\partial x}=\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n},\quad \frac{\partial^k}{\partial x^k}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^k. \tag{21.2}$$

对此，如置

$$Y(x)=Y(x_1)\cdots Y(x_n)\quad [R^n\text{ 的 Heaviside 函数}],$$

$$E(x)=(x_1\cdots x_n)^{k-1}\frac{Y(x)}{((k-1)!)^n},$$

❶ 实际須要証明。利用1的分解［§7］，按照局部化的定义仔細地推演即得。

E 就是 $\frac{\partial^k}{\partial x^k}$ 的基本解，$k\geqslant 2$ 时 $E\in(\mathfrak{E}^{k-2})$。

定理 21.3 [构造定理]　有限阶的广义函数 $S\in(\mathfrak{D}^m)'$, $m<\infty$ 能作为連續函数的高阶微系数

$$S=\frac{\partial^k f}{\partial x^k},\quad k=m+2,\ f\in(\mathfrak{E}^0)$$

而表出。

証明　把 §18 那样的 γ 乘于上見的 E，作出参函数 $\gamma E\in(\mathfrak{D}^m)$ 的話，$S*(\gamma E)$ 就是連續函数，并且得到分解

$$S=\frac{\partial^k S*(\gamma E)}{\partial x^k}+S*\zeta,\ \zeta\in(\mathfrak{D})。$$

$S*\zeta\in(\mathfrak{E})$ 因普通的不定积分可表为

$$S*\zeta=\frac{\partial^k\psi}{\partial x^k},\quad \psi\in(\mathfrak{E})。$$

再置 $f=S*(\gamma E)+\psi$ 就行了。　　証毕

如有适当的基本解，关于 $\frac{\partial^k}{\partial x^k}$ 以外的微分算子也能得到构造定理。在 §19 已見，迭次 Laplace 算符 Δ^k 的基本解

$$E=A_{n,k}|x|^{2k-n}\ 或\ B_{n,k}|x|^{2k-n}\log|x|$$

当 $k>\frac{n}{2}$ 时成为連續函数 [在原点置为 0]。使 k 由此逐漸增大，这个 E 依次成为 C^1 級，C^2 級，……。

定理 21.4 [构造定理]　R^n 上具有有界支集的广义函数，对应其阶数 m 及維数 n，如取充分大的 k，就能作为 k 重 Laplace 算符

$$S=\Delta^k f$$

而表出。当給定一般的 $S\in(\mathfrak{D})'$ 及 R^n 的有界开集 Ω_0 时，在 Ω_0，S 就能表为上列形式 [$f\in(\mathfrak{E}^0)_{R^n}$]。又当給定包含閉包 $\overline{\Omega}_0$ 的开集 Ω 时，就能从 $(C)_\Omega$ 选取上列的 f。

証明　关于前半，使 k 充分大并作 Δ^k 的基本解 $E\in(\mathfrak{E}^m)$，然

后置 $f=E*S$ 即可。关于后半，在 Ω_0 上如取使 $\alpha(x)=1$ 的 $\alpha\in(\mathfrak{D})_\Omega$，依据前半就能写成 $\alpha S=\Delta^k g$，$g\in(\mathfrak{E}^0)$；于是置 $f=\alpha g$ 就行了。

証毕

$k>\frac{n}{2}$ 时，象 § 18 那样，乘上 γ 作出 Δ^k 的参函数 γE，对任意的测度 $\mu\in(C)'=(\mathfrak{D}^0)'$ 即得連續函数 $\mu*(\gamma E)$。所以，与 § 18 同样，可証下列定理。

定理 21.5 当 R^n 上的某广义函数 T 的 k 重 Laplace 算符 $\Delta^k T$ 是测度，$k>\frac{n}{2}$ 时，T 是連續函数。命題的假設与終結都能在 R^n 的开集作局部化。

这不过是把 § 18 的討論加以变形的一个例子。

关于 $S\in(\mathfrak{D}^m)'$ 的支集还要补充一点注解。已知 [§ 7 末尾]，在 $\mathrm{Car}(S)$ 的邻域若 $\varphi\in(\mathfrak{D})$ 恒等于 0，則 $S(\varphi)=0$。实际关于 $S\in(\mathfrak{D}^m)'$ 及 $\varphi\in(\mathfrak{D}^m)$ 也是这样。这是因为，$\varepsilon\to 0$ 时，正則化 $\varphi*\alpha_\varepsilon\in(\mathfrak{D})$ 在 $(\mathfrak{D}^m)$ 中向 φ [例] 收斂，然另一面，使 ε 充分小时 $\varphi*\alpha_\varepsilon$ 在 $\mathrm{Car}(S)$ 的邻域为 0，从而作为 $S(\varphi*\alpha_\varepsilon)=0$ 的极限就得到 $S(\varphi)=0$。

在 $\mathrm{Car}(S)$ 上虽然 $\varphi(x)=0$，但不必有 $S(\varphi)=0$ [例如 $S=\delta'$ 的情形]。然而

定理 21.6 当 $S\in(\mathfrak{D}^m)'$ $[m\leqslant\infty]$ 时，若 φ 的直到 m 阶的微系数都在 $\mathrm{Car}(S)$ 上为 0，則 $S(\varphi)=0$。把 $(\mathfrak{D}^m)'$ 及 $(\mathfrak{D}^m)$ 依次变形为 $(\mathfrak{E}^m)'$ 及 $(\mathfrak{E}^m)$ 也可。

此定理的証明将叙述于后，但由此可得如下的特殊广义函数的构造定理。

定理 21.7 仅以原点为支集的广义函数 S 能表为 Dirac 测度 δ 的微系数之和：

$$S=\sum_p a_p D^p\delta. \tag{21.3}$$

系数 a_p 唯一地确定。这个和是有限和；实际，对于比 S 的阶数 m

[因支集有界，故 $m<\infty$] 大的 $\|p\|$，$a_p=0$。

这就是說，S 成为质点、偶极子及三重极等等的和。用前定理証明如下。为简捷起見，对于 $p=(p_1,\cdots,p_n)$，把 $p_i!$ 的乘积設为 $p!$，即

$$p!=p_1!\cdots p_n!,\tag{21.4}$$

并以 x^p 表示坐标 x_i 的 p_i 次方的乘积。多变数 Taylor 公式能表成

$$\varphi(x)=\sum_{\|p\|\leq m}\frac{D^p\varphi(0)}{p!}x^p+\psi(x)\quad[\psi(x):\text{余項}].\tag{21.5}$$

如設 $\varphi\in(\mathfrak{E})$，則有 $\psi\in(\mathfrak{E})$，根据前定理即知 $S(\psi)=0$。由此可見，如置

$$\varphi_p(x)=x^p,\quad a_p=\frac{(-1)^{|p|}S(\varphi_p)}{p!},\tag{21.6}$$

根据 $D^p\varphi(0)=(-1)^{|p|}D^p\delta(\varphi)$，則得

$$S(\varphi)=\sum\frac{D^p\varphi(0)}{p!}S(\varphi_p)=\sum a_pD^p\delta(\varphi).$$

这就是(21.3)的内容。如以(21.3)表示 $S(\varphi_p)$ 的話，即知 a_p 的唯一性，从而对于 $\|p\|>m$ 也能知道 $a_p=0$。

定理 21.6 的証明 $S\in(\mathfrak{D}^m)'$ 时，根据局部化，可以把它化成 $S\in(\mathfrak{E}^m)$ 的情形：这是因为，利用 1 的分解 [§ 7] 如置

$$S=\sum\alpha_\nu S,\quad\sum\alpha_\nu=1,\quad\alpha_\nu\in(\mathfrak{D})$$

就有 $\alpha_\nu S\in(\mathfrak{E}^m)'$，$\mathrm{Car}(\alpha_\nu S)\subset\mathrm{Car}(S)$ 的原故。設 $S\in(\mathfrak{E}^m)'$。因 S 的阶数有限，設 $m<\infty$ 即可。因为 φ 的各阶微系数 $D^p\varphi(x)$ [$\|p\|\leq m<\infty$] 在有界閉集 $\mathrm{Car}(S)$ 上为 0，所以若把整数 $k>0$ 暂时固定，在 $\mathrm{Car}(S)$ 的适当的 η 邻域 $U[\eta>0]$ 中，那些 $D^p\varphi(x)$ 就全都适合

$$|D^p\varphi(x)|\leq\frac{1}{k}\quad[x\in U].$$

在 U 上置 $f(x)=\varphi(x)$，在其外置 $f(x)=0$，于是正則化 $f*\alpha_\varepsilon$ 适合

$$\text{到处}\quad |D^p f*\alpha_\varepsilon(x)|\leqslant\frac{1}{k}. \tag{21.7}$$

設 $0<\eta'=\text{const}<\eta$，若把 ε 限于 $<\eta-\eta'$，在 $\text{Car}(S)$ 的 η' 邻域 V 中就有 $f*\alpha_\varepsilon(x)=\varphi*\alpha_\varepsilon(x)$，且当 $\varepsilon\to0$ 时

$$\text{在 } V \text{ 上一致地}\quad D^p f*\alpha_\varepsilon(x)\to D^p\varphi(x),$$

就是說，作为 V 上的函数族乃有 $f*\alpha_\varepsilon\to\varphi$ in $(\mathfrak{E}^m)_V$。故 $S(f*\alpha_\varepsilon)\to S(\varphi)$ [定理 21.2]。这时，如使 ε 充分小，并置 $\varphi_k=f*\alpha_\varepsilon$，則有

$$|S(\varphi_k)-S(\varphi)|\leqslant\frac{1}{k}.$$

于此使 k 变动，按照 (21.7) 則有 $\varphi_k\to0$ in $(\mathfrak{E}^m)$ $[k\to\infty]$，因之 $S(\varphi_k)\to0$。于是 $S(\varphi)=0$。

注意 21.1 把定理 21.2 作成定理 21.6 那样尖銳的形状则不可能。φ_j 的各阶微系数虽在 $\text{Car}(S)$ 上一致地 $D^p\varphi_j(x)\to0$，但不必有 $S(\varphi_j)\to0$。

第4章　核广义函数与直积

到現在，一直考慮在一定基础空間上的广义函数。从 x 的函数 $f(x)$ 及 y 的函数 $g(y)$ 制作'直积函数' $h(x, y)=f(x)g(y)$ 时，出現了三种基础空間——x 的空間，y 的空間及 (x, y) 的空間。与之相当的直积广义函数的概念，則蘊蓄于更一般的'核广义函数'概念之中。本章将用例子說明这种二个以上基础空間相关的情形。另外虽然有不少地方討論了各种映象的連續性，但是这些都用比較容易的方法来建立，即由簡单的情形出发再过渡到极限情形。为了避免过于冗长的討論，我們在一般卷积的一节中把关于連續性的叙述压縮到最小限度之內。有些要讀者自己去推敲，因为这些問題并不是沒有再深入研究的余地的。

§22　双線性映象的連續性，核广义函数

处理从函数空間 (A) 到函数空間 (B) 的連續綫性映象 $\psi\Rightarrow\tilde{\psi}$ 时，考慮是否能利用形如

$$\tilde{\psi}(x)=\int W(x, y)\psi(y)dy$$

的积分核 W 把它表达出来，时常成为基本性的問題。特別是 (A) 代数性地包含 $(\mathfrak{D})$，而将 $\tilde{\psi}$ 視为广义函数，而考慮这一情形的时候，如果仍然限于

$$B(\varphi, \psi)=\tilde{\psi}(\varphi)=\int \tilde{\psi}(x)\varphi(x)dx$$

是关于 φ，ψ 之每个都連續的話，将不会影响一般性。在这样情况下，后述的核广义函数的存在及其唯一性，則成为开場問題的一般出发点。

在这里，变数 x, y 所变动的空間必須予以区别。設 x 的空間为 X，y 的空間为 Y。x, y 之組 $z=(x,y)$ 的空間 $Z=X\times Y$ 是 X 与 Y 的'直积空間'。例如在 X 上所考虑的 $(\mathcal{D})$ 写为 $(\mathcal{D})_x$ 或 $(\mathcal{D})_X$，要与在 Y 上所考虑的 $(\mathcal{D})_y$ 等加以区别。

与 $X\times Y$ 同样，$\varphi\in(\mathcal{D})_x$ 与 $\psi\in(\mathcal{D})_y$ 之組 (φ, ψ) 的全体表为 $(\mathcal{D})_x\times(\mathcal{D})_y$。对其各个組能唯一确定数值 $B(\varphi, \psi)$ 的对应

$$B:\ (\varphi, \psi)\Rightarrow B(\varphi, \psi)$$

是'$(\mathcal{D})_x\times(\mathcal{D})_y$ 上的泛函'。

現在，一般地考虑 $(\varphi, \psi)\in(\mathcal{D})_x\times(\mathcal{D})_y$ 的泛函 $B(\varphi, \psi)$ 中的**双綫性的**，就是关于 φ, ψ 中的每个[将他方固定]皆是綫性的。并設其关于 φ, ψ 中的每个皆連續。这个連續性也能表达成

$$\varphi_j\to 0 \text{ 时 } B(\varphi_j, \psi)\to 0,$$

$$\psi_j\to 0 \text{ 时 } B(\varphi, \psi_j)\to 0.$$

仅由这些假設，如下所說，可以导致更强的連續性：任意給定 $(\mathcal{D})_y$ 中的有界集 M，当 $\varphi_j\to 0$ 时，对所有的 $\psi\in M$ 就一致地 $B(\varphi_j, \psi)\to 0$，也就是

$$\varepsilon_j=\sup_{\psi\in M}|B(\varphi_j, \psi)|\to 0. \tag{22.1}$$

将此簡单地表現为

$$\text{当 } \varphi_j\to 0 \text{ 时，对于有界集中的 } \psi \text{ 一致地}$$
$$B(\varphi_j, \psi)\to 0. \tag{22.2}$$

又在同样的意义下

$$\text{当 } \psi_j\to 0 \text{ 时，对于有界集中的 } \varphi \text{ 一致地}$$
$$B(\varphi, \psi_j)\to 0. \tag{22.3}$$

更一般地，設 (A_1), (A_2), (A_3) 为局部凸空間，关于双綫性的映象

$$(A_1)\times(A_2)\ni(\varphi, \psi)\Rightarrow B(\varphi, \psi)\in(A_3), \tag{22.4}$$

考虑同样的性质 (22.2)，(22.3) 极为重要。然而，例如 (22.2)，乃是把 (22.1) 的絕对值取作基本拟范数，并作如下的解釋：

$$\left.\begin{array}{l}\text{对于}(A_3)\text{的各基本拟范数}\ \rho\ \text{及}(A_2)\text{中的}\\ \text{各有界集}\ M,\ \text{当}\ \varphi_j\to 0\ \text{时}\\ \bar{\rho}(\varphi_j)=\sup\limits_{\psi\in M}\rho(B(\varphi_j,\psi))\to 0.\end{array}\right\}\qquad(22.2')$$

双綫性映象(22.4)在这种意义下具有性质(22.2)，(22.3)时，則称这个映象在 Schwartz 意义下**分离連續**(separately continuous)。这时显見 $B(\varphi, \psi)$ 关于 φ, ψ 的每个都連續。其逆定理在广义函数理論中也时常成立。这是由于所考虑的局部凸空間的大部具有 §11 所述的性质(11.1)的緣故。 已知，这个性质(与 Bourbaki 所称的桶形'tonnelé'的性质同效)在該空間則是

$$\left.\begin{array}{l}\text{連續拟范数的集}\ \{\rho_i\}\ \text{若在各点有界:}\\ \bar{\rho}(\varphi)=\sup\limits_{i}\rho_i(\varphi)<\infty,\\ \text{則上确界}\ \bar{\rho}\ \text{也必然是連續拟范数。}\end{array}\right\}\qquad(11.1)$$

因($\mathfrak{D}$)具有这种性质[定理 11.2]，所以关于$(\mathfrak{D})_x\times(\mathfrak{D})_y$上的泛函的所謂**分离連續**性蘊涵于下列的一般定理之中。

定理 22.1　双綫性映象(22.4)关于 φ, ψ 的每个都連續时，如果(A_1)具有性质(11.1)，則(22.2)成立，(A_2)具有性质(11.1)，則(22.3)成立；从而，(A_1) 及 (A_2) 均有这种性质时，映象必为分离連續。

証明　对于(A_1)，假定(11.1)，求証(22.2′)。(22.2′)的 ρ 及 M 給定时，如証明

$$\bar{\rho}(\varphi)=\sup_{\psi\in M}\rho(B(\varphi, \psi))$$

成为 $\varphi\in(A_1)$的連續拟范数，卽得当 $\varphi_j\to 0$ 时 $\bar{\rho}(\varphi_j)\to 0$。如将 ψ 固定，則 $B(\varphi, \psi)$关于 φ 是綫性而且連續，从而 $\rho(B(\varphi, \psi))$就成为 φ 的連續拟范数。由此可見，只要上式 $<\infty$ 卽可[(11.1)]。但若把 φ 固定，$\rho(B(\varphi, \psi))$就是 ψ 的連續拟范数，从而在有界集 M 上有界，卽 $\bar{\rho}(\varphi)<\infty$。　　　　証毕

$(\mathfrak{D}_K^m)$，$(\mathfrak{E})$，$(\mathfrak{E}^m)$也都具有性质(11.1)：是因能完备地距离化

的緣故[定理 11.1]。从而 $(\mathfrak{D}''')$ 也是如此：与定理 11.2 同样。此外还有

定理 22.2 自反的❶局部凸空間具有性质(11.1)。其共軛空間也具有性质(11.1)。

証明 設(A)为自反的局部凸空間，并設在其中的連續拟范数的集 $\{\rho_i\}$ 在各点有界。与定理 13.2 同样地❷能把各 ρ_i 表为

$$\rho_i(\varphi)=\sup_{S\in M(i)}|S(\varphi)| \quad [\text{各 } M(i) \text{ 是 } (A)' \text{ 的有界集}]$$

的形状。如置 $M=\bigcup_i M(i)$，则上确界可改写成

$$\bar{\rho}(\varphi)=\sup_i \rho_i(\varphi)=\sup_{S\in M}|S(\varphi)| \quad [<\infty].$$

依据自反性$(A)=(A)''$若把 $\varphi\in(A)$看作$\varphi\in(A)''$，$\bar{\rho}$ 即是$|\varphi(S)|$的上确界[M 上]，因其有限，所以 M 是$(A)'$的有界集，$\bar{\rho}$ 是$(A)''$的基本拟范数，从而 $\bar{\rho}$ 是$(A)=(A)''$上的連續拟范数。这样，(A)具有性质(11.1)就明确了。因为根据 $(A)=(A)''$ 即有 $(A)'=(A)'''$，所以$(A)'$也是自反的，且仍有性质(11.1)。 証毕

即使 $B(\varphi,\psi)$分离連續，关于 φ 及 ψ 的組也不必連續，特別是

定理 22.3 (A_1)，(A_2)能距离化时，从$(A_1)\times(A_2)$到任意的(A_3)的分离連續的双綫性映象$(\varphi,\psi)\Rightarrow B(\varphi,\psi)$，关于$(\varphi,\psi)$連續，即 $\varphi_j\to\varphi$，$\psi_j\to\psi$ 时 $B(\varphi_j,\psi_j)\to B(\varphi,\psi)$.

証明 既然能够距离化，按照常例，就序列 φ_j，ψ_j 的收斂証明即可。这时，从收斂序列 ψ_j 的有界性及 $\varphi_j-\varphi\to 0$ 即得 $B(\varphi_j-\varphi,\psi_j)\to 0$. 另一方面，因 $B(\varphi,\psi_j)\to B(\varphi,\psi)$，故

$$B(\varphi_j,\psi_j)=B(\varphi_j-\varphi,\psi_j)+B(\varphi,\psi_j)\to B(\varphi,\psi).$$ 証毕

这个定理将要在 § 23 中使用。又定理 22.2 結合着定理 22.1 将用于 § 24。

---

❶ 与$(\mathfrak{D})$的'自反'[定理 15.1]的意义相同。

❷ 把連續拟范数补加于基本拟范数系并不影响其拓扑。从而把 ρ_i 看做基本拟范数，也能引用定理 13.2。

現在返回到$(\mathfrak{D})_x\times(\mathfrak{D})_y$上的分离連續的双綫性泛函，試作其一般的例子。首先，对于$x\in X$的函数$f(x)$及$y\in Y$的函数$g(y)$，把$z=(x, y)$的函数$f(x)g(y)$表示为

$$f(x)g(y)=f\times g(x, y)=f\times g(z),$$

且把$f\times g$叫做f, g的直积。这是直积空間$X\times Y$上的函数。特別，$\varphi\in(\mathfrak{D})_x$与$\psi\in(\mathfrak{D})_y$的直积$\varphi\times\psi$仍是$C^\infty$級函数，而且

$$\mathrm{Car}(\varphi\times\psi)=\mathrm{Car}(\varphi)\times\mathrm{Car}(\psi),$$

从而$\varphi\times\psi\in(\mathfrak{D})_{xy}[=(\mathfrak{D})_z]$。假如固定$\psi$，卽得綫性映象

$$(\mathfrak{D})_x\ni\varphi\Rightarrow\varphi\times\psi\in(\mathfrak{D})_{xy},$$

然当$(\mathfrak{D})_x$偽收斂$\varphi_j\to0$时，显見有$\varphi_j\times\psi\to0$。从而[定理9.1]，这个映象关于$(\mathfrak{D})$拓扑連續。把φ固定亦同。故从定理22.1得

定理 22.4 作出直积的映象

$$(\mathfrak{D})_x\times(\mathfrak{D})_y\ni(\varphi, \psi)\Rightarrow\varphi\times\psi\in(\mathfrak{D})_{xy}$$

既是双綫性又是分离連續。从而，使直积空間$X\times Y$上的广义函数$W\in(\mathfrak{D})'_{xy}$作用于$\varphi\times\psi$的

$$B(\varphi, \psi)=W(\varphi\times\psi)$$

作为$(\varphi, \psi)\in(\mathfrak{D})_x\times(\mathfrak{D})_y$的双綫性泛函必然分离連續。

W叫做这个泛函B的核。用形式的积分表示的話，則是

$$W(\varphi\times\psi)=\int W(z)\varphi\times\psi(z)dz,$$

这又能形式地写成

$$W(\varphi\times\psi)=\int W(x, y)\varphi(x)\psi(y)dx\,dy.$$

現在把ψ固定，泛函

$$\tilde{\psi}:\ (\mathfrak{D})_x\ni\varphi\Rightarrow\tilde{\psi}(\varphi)=W(\varphi\times\psi)$$

就确定了，$\tilde{\psi}$是綫性的而且連續，卽$\tilde{\psi}\in(\mathfrak{D})'_x$。这个广义函数$\tilde{\psi}$又可用新的形式的积分表为

$$\tilde{\psi}=\tilde{\psi}(x)=\int W(x, y)\psi(y)dy=\int W\cdot\psi(y)dy \quad [\in (\mathfrak{D})'_x]$$

等，W 叫做这个形式的积分的核。W 若是 $X\times Y$ 上的局部可积函数，則这积分不过是普通的积分，$\tilde{\psi}(x)$ 就是原来的函数記号。若按 x_i 微分广义函数 $\tilde{\psi}$，則有

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial x_i}(\varphi)=-\tilde{\psi}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)=-W\left(\frac{\partial\varphi\times\psi}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial W}{\partial x_i}(\varphi\times\psi).$$

从而 $\partial\tilde{\psi}/\partial x_i$ 是以 $\partial W/\partial x_i$ 为核，对应于 ψ 的东西。这一結果如用形式的积分写出来，就是

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\int W(x, y)\psi(y)dy=\int\frac{\partial W(x, y)}{\partial x_i}\psi(y)dy. \qquad (22.5)$$

对各 $\psi\in(\mathfrak{D})_y$，使上見的 $\tilde{\psi}$ 与之对应，就得到綫性映象

$$(\mathfrak{D})_y\ni\psi\Rightarrow\tilde{\psi}=\int W(x, y)\psi(y)dy\in(\mathfrak{D})'_x. \qquad (22.6)$$

同样能定义綫性映象

$$(\mathfrak{D})_x\ni\varphi\Rightarrow\tilde{\varphi}=\int W(x, y)\varphi(x)dx\in(\mathfrak{D})'_y, \qquad (22.7)$$

$\partial\tilde{\varphi}/\partial y_j$ 也与 (22.5) 同样，可以行施‘积分号下的微分法’。W 又叫做这些映象 (22.6)，(22.7) 的核。如回忆 $(\mathfrak{D})'$ 的拓扑或是[强]收斂的定义，就能把 $(\varphi, \psi)\Rightarrow W(\varphi\times\psi)$ 的分离連續性轉变如下。

定理 22.5 根据核 $W\in(\mathfrak{D})'_{xy}$ 而得的綫性映象(22.6)，(22.7)都連續。

§23 核的存在及唯一性

定理 23.1 为了 $W\in(\mathfrak{D})'_{xy}$ 及 $V\in(\mathfrak{D})'_{xy}$ 在 $X\times Y$ 的开集 Ω 一致，其充分条件是当

$$\varphi\in(\mathfrak{D})_x \quad \psi\in(\mathfrak{D})_y \quad \mathrm{Car}(\varphi\times\psi)\subset\Omega$$

时，恒有 $W(\varphi\times\psi)=V(\varphi\times\psi)$.

証明 假定对于上面的 $\varphi\times\psi$ 一致，然后一般地对于支集合

于Ω的$\omega\in(\mathfrak{D})_{xy}$，推証$W(\omega)=V(\omega)$。今設基础空間$X$，$Y$是Euclid空間。試取給出$S\in(\mathfrak{D})'_{xy}$的正則化$S*\gamma$的函数族$\gamma=\gamma_\varepsilon$ [$\varepsilon>0$；参看(4.12)]，幷注意由卷积的定义$S*\gamma(z)=S(\tau_z\sigma\gamma)$所得的等式

$$S*\gamma(\omega)=\int\omega(z)S(\tau_z\sigma\gamma)dz,$$

积分在$\mathrm{Car}(\omega)$上行施之卽可。因$\mathrm{Car}(\omega)$是含于Ω的有界閉集，故使$\gamma=\gamma_\varepsilon$的$\varepsilon$充分小时，对于所有的$z\in\mathrm{Car}(\omega)$，$\tau_z\sigma\gamma$的支集則含于$\Omega$之內。另一方面，給出正則化的$\gamma$特别能选为

$$\gamma=\alpha\times\beta\quad\alpha\in(\mathfrak{D})_x\quad\beta\in(\mathfrak{D})_y$$

的形状，这时

$$\tau_z\sigma\gamma=(\tau_x\sigma\alpha)\times(\tau_y\sigma\beta)\quad[z=(x,y)],$$

从而，如使ε充分小，把W，V代入于S的积分就相等。作为这样得到的$W*\gamma(\omega)=V*\gamma(\omega)$的极限[$\varepsilon\to0$]就是$W(\omega)=V(\omega)$。

証毕

因把X，Y曾設为Euclid空間，故能利用卷积，然定理是局部性的，因之X，Y可設为Euclid空間的任意开集。又如§7[C^∞流形部分]那样，就一般的C^∞流形考慮，定理也成立。当ω的支集含于一个坐标邻域时，$W(\omega)=V(\omega)$，因之，把这总加起来卽得在Ω上的$W=V$。在下列定理的証明中，关于各个$B_{\mu\nu}$也可同样地考慮，所以把基础空間X，Y設为Euclid空間行施核的构成就行了。

定理 23.2　$\varphi\in(\mathfrak{D})_x$及$\psi\in(\mathfrak{D})_y$的双綫性泛函$B(\varphi,\psi)$关于$\varphi$，$\psi$中的每个皆都連續的話[实是分离連續：前节]，$B$就具有核：

$$B(\varphi,\psi)=W(\varphi\times\psi),\quad W\in(\mathfrak{D})'_{xy}.$$

而且核W是由B唯一确定。

唯一性在前定理已經闡明；現在考虑 $\Omega=X\times Y$ 的情形。为了实际能构成核，首先試取 X，Y 上的 1 的分解

$$1=\sum_{\mu}\alpha_{\mu}[\alpha_{\mu}\in(\mathfrak{D})_{x}],\quad 1=\sum_{\nu}\beta_{\nu}[\beta_{\nu}\in(\mathfrak{D})_{y}];$$

参照 §7。这时 $B(\varphi,\psi)$ 能分成具有同样性质的泛函

$$B_{\mu\nu}(\varphi,\psi)=B(\alpha_{\mu}\varphi,\beta_{\nu}\psi)\qquad(23.1)$$

之和。这些 $B_{\mu\nu}$ 的核 $W_{\mu\nu}$ 如能求得，按定理 23.1 卽知

在 $\mathrm{Car}(\alpha_{\mu})\times\mathrm{Car}(\beta_{\nu})$ 的外部，$W_{\mu\nu}=0$，

因之如 §7 那样，总加多数的广义函数，就能确定广义函数 $W=\sum_{\mu\nu}W_{\mu\nu}$，这个 W 就是 B 的核。

于是，把 μ，ν 任意地固定，把 $B_{\mu\nu}$ 略記为 A，試作它的核。

$A(\varphi,\psi)$ 根据 (23.1) 对于任意的 $(\varphi,\psi)\in(\mathfrak{E})_{x}\times(\mathfrak{E})_{y}$ 都能确定，仍是双綫性的，而且[根据 $\varphi\Rightarrow\alpha_{\mu}\varphi$ 等的連續性]关于 φ，ψ 的每个按 $(\mathfrak{E})$ 的拓扑連續，因而是分离連綫[定理 22.1]。因为 $(\mathfrak{E})$ 可以距离化，所以 $A(\varphi,\psi)$ 关于 φ，ψ 的組 (φ,ψ) 連續[定理 22.3]。特别对于 $(\mathfrak{E})_{x}$，$(\mathfrak{E})_{y}$ 的 0，适当选取邻域 U，V，則对于 $\varphi\in U$ 及 $\psi\in V$ 有 $|A(\varphi,\psi)|<1$. 邻域 U，V 各由有限个基本拟范数 ρ_{i}，ρ'_{j} 定义成

$$U=\{\varphi;\ \rho(\varphi)<\varepsilon\},\qquad \rho(\varphi)=\max_{i}\rho_{i}(\varphi),$$

$$V=\{\psi;\ \rho'(\psi)<\varepsilon'\},\qquad \rho'(\psi)=\max_{j}\rho'_{j}(\psi)$$

的形状[§8]。ρ，ρ' 也都是拟范数，这样，$\rho(\varphi)<\varepsilon$，$\rho'(\psi)<\varepsilon'$ 时应有 $|A(\varphi,\psi)|<1$. 从而在 $(\mathfrak{E})_{x}\times(\mathfrak{E})_{y}$ 上，形如

$$|A(\varphi,\psi)|\leqslant c\cdot\rho(\varphi)\rho'(\psi),\quad c=\mathrm{const}\qquad(23.2)$$

的不等式成立。然而各 ρ_{i}，ρ'_{j} 具有 ρ^{p}_{K} 的形状[§8 末尾]，并且已知，若取必要的微分运算 D^{p}[有限个]的阶数的最大值 $m<\infty$，ρ^{p}_{K} 就是 $(\mathfrak{E}^{m})$ 的基本拟范数(21.1)。从而，对任意的 $\varphi\in(\mathfrak{E}^{m})_{x}$ 及 $\psi\in(\mathfrak{E}^{m})_{y}$ 也能規定 $\rho(\varphi)$，$\rho'(\psi)$，并且是按 $(\mathfrak{E}^{m})$ 拓扑的連續拟

范数。

由此可見，$A(\varphi, \psi)$ 能保持着不等式(23.2)，双綫性地扩展于$(\varphi, \psi)\in(\mathfrak{E}^m)_x\times(\mathfrak{E}^m)_y$；例如，先把 φ 固定，将其視为 ψ 的綫性泛函扩展之，其次再就 φ 扩展之即可。其結果則是对于組$(\varphi, \psi)\in(\mathfrak{E}^m)_x\times(\mathfrak{E}^m)_y$ 連續。任意地固定 $E\in(\mathfrak{E}'^m)_x$ 及$F\in(\mathfrak{E}'^m)_y$，根据这个連續性以及 $x\Rightarrow\tau_x E$，$y\Rightarrow\tau_y F$ 的連續性，則 x，y 的函数

$$G(x, y)=A(\tau_x E, \tau_y F)$$

关于組(x, y)連續。現在返回到 $\varphi\in(\mathfrak{D})_x$ 与 $\psi\in(\mathfrak{D})_y$，把 $X\times Y$ 上的連續函数 G 視为广义函数，并使之作用于 $\varphi\times\psi$，就能用普通的积分表示成

$$\begin{aligned}G(\varphi\times\psi)&=\iint A(\tau_x E, \tau_y F)\varphi(x)\psi(y)\,dx\,dy\\&=\iint A(\varphi(x)\tau_x E, \psi(y)\tau_y F)\,dx\,dy.\end{aligned}$$

这个积分在包含 $\mathrm{Car}(\varphi)\times\mathrm{Car}(\psi)$ 的有界范圍内行施之即可。从而，象下面就要說明的那样，能把积分置于 $A(\ ,\ )$ 的里面，

$$\begin{aligned}G(\varphi\times\psi)&=A\left(\int\varphi(x)\tau_x E\,dx, \int\psi(y)\tau_y F\,dy\right)\\&=A(\varphi*E, \psi*F).\end{aligned}$$

当把 λ 作为参数而給出函数 $g_\lambda\in(\mathfrak{E}^m)_y$，而对应 $\lambda\Rightarrow g_\lambda\in(\mathfrak{E}^m)_y$ 連續时，如置

$$\psi_b=\int_a^b g_\lambda d\lambda\quad[a, b\text{ 有限}],$$

則有 $\psi_b\in(\mathfrak{E}^m)_y$，并且

$$\frac{1}{\varepsilon}(\psi_{b+\varepsilon}-\psi_b)\to g_b\ \text{in}\ (\mathfrak{E}^m)\quad[\varepsilon\to 0].$$

由此可推知，对于 $f\in(\mathfrak{E}^m)_x$ 得

$$\int_a^b A(f, g_\lambda)\,d\lambda=A\left(f, \int_a^b g_\lambda d\lambda\right).$$

这是由于按 b 微分两端然后对比而得的。将此重复 X，Y 的維数那样多的回次，$G(\varphi\times\psi)$ 可变成‘在 A 内的积分’。

今置 $k=m+2$，如已見于 §21 那样，

$$\partial^k/\partial x^k=(\partial^n/\partial x_1\cdots\partial x_n)^k$$

则有基本解 $E\in(\mathfrak{E}^m)_x$。$F\in(\mathfrak{E}^m)_y$ 也是 $\partial^k/\partial y^k$ 的基本解，于上面 $G(\varphi\times\psi)=A(\varphi*E,\ \psi*F)$ 的 φ，ψ 代入 $\partial^k\varphi/\partial x^k$ 及 $\partial^k\psi/\partial y^k$，則有

$$G((\partial^k\varphi/\partial x^k)\times(\partial^k\psi/\partial y^k))=A(\varphi,\ \psi).$$

如置 $z=(x,\ y)$，左端則成

$$G\left(\frac{\partial^k}{\partial z^k}(\varphi\times\psi)\right)=\pm\frac{\partial^k}{\partial z^k}G(\varphi\times\psi).$$

$\pm\partial^k G/\partial z^k$ 乃是 A 的核。　　証毕

仿照前节也能把定理轉变如下。

定理 23.3　給出由 $(\mathfrak{D})_y$ 到 $(\mathfrak{D})'_x$ 的綫性映象 $\psi\Rightarrow\tilde{\psi}$ 时，假設对于在 $(\mathfrak{D})_y$ 的收斂 $\psi_j\to0$，产生作为广义函数的单純收斂 $\tilde{\psi}_j\Rightarrow0$。那末，映象 $\psi\Rightarrow\tilde{\psi}$ 具有核 $W\in(\mathfrak{D})'_{xy}$，而 W 由此映象唯一确定。

在假設中的收斂 $\psi_j\to0$ 仅限于伪收斂亦可 [定理 9.1]。这虽是在某 $(\mathfrak{D}_K)$ 中的收斂，但因 $(\mathfrak{D}_K)$ 可以距离化，所以只要序列的伪收斂适合假設就足够了。又有，

定理 23.4　由核广义函数列 $W_j\in(\mathfrak{D})'_{xy}$ 所規定的泛函列 $\boldsymbol{B}_j$ 对于各 φ，ψ 如有有限的极限

$$\lim_{j\to\infty}\boldsymbol{B}_j(\varphi,\ \psi)=\lim_{j\to\infty}W_j(\varphi\times\psi),$$

則 W_j 在 $(\mathfrak{D})'_{xy}$ 中收斂。

簡証　在定理 23.2 的証明中，因距离空間 $(\mathfrak{E})$ 的完备性，(23.2) 可写成

$$|\boldsymbol{B}_j(\alpha_\mu\varphi,\ \beta_\nu\psi)|\leqslant c\rho(\varphi)\rho'(\psi).$$

因此，$A_j(\varphi,\ \psi)=\boldsymbol{B}_j(\alpha_\mu\varphi,\ \beta_\nu\psi)$ 能用一致有界而且在各点收斂的連續函数列 $G_j(x,\ y)$ 表为

$$A_j(\varphi,\ \psi)=\pm\frac{\partial^k}{\partial z^k}G_j(\varphi\times\psi)\quad[k\text{ 固定}].$$

G_j 作为广义函数列則在 $(\mathfrak{D})'_{xy}$ 中收斂。因为 $\alpha_\mu\times\beta_\nu\cdot W_j$ 是 A_j 的核，所以

$$\alpha_\mu\times\beta_\nu\cdot W_j=\pm\frac{\partial^k}{\partial z^k}G_j$$

在 $(\mathfrak{D})'_{xy}$ 中收斂。将此总加起来卽得 W_j 的收斂。

§24 广义函数的直积

給定 $S\in(\mathfrak{D})'_x$ 与 $T\in(\mathfrak{D})'_y$ 时，$\varphi\in(\mathfrak{D})_x$ 与 $\psi\in(\mathfrak{D})_y$ 的双綫性泛函 $S(\varphi)T(\psi)$ 适合定理 23.2 的条件，因之其核存在。特別如 S, T 是局部可积函数 f, g，根据 Fubini 定理，这个泛函就成为

$$\int f(x)\varphi(x)dx\cdot\int g(y)\psi(y)dy=\int f\times g(z)\varphi\times\psi(z)dz,$$

其 $f\times g$ 乃是核。卽使对于一般的 S, T，作为 $(\varphi,\psi)\Rightarrow S(\varphi)T(\psi)$ 的核唯一确定的广义函数叫做直积 $S\times T$，因前面曾把核 W 写成 $W(x, y)$，那么也可把直积写做 $S(x)T(y)$：

$$S(\varphi)T(\psi)=S\times T(\varphi\times\psi)=\int S(x)T(y)\varphi(x)\psi(y)dx\,dy.$$

由此定义立卽得到直积的微分法及結合律

$$D_xD_y(S\times T)=(D_xS)\times(D_yT),$$

$$(S\times T)\times U=S\times(T\times U);$$

但其中 D_x, D_y 各表示关于 x, y 的任意阶次的偏微分运算。又从以核的唯一性为根据的定理 23.1，显有

$$\operatorname{Car}(S\times T)=\operatorname{Car}(S)\times\operatorname{Car}(T).$$

交换律 $S\times T=T\times S$ 也成立，詳細地說，在

$$S\times T(\omega)=T\times S(\tilde{\omega}),\quad \tilde{\omega}(y, x)=\omega(x, y)$$

的意义下成立。

現在具体地規定对于一般的 $\omega\in(\mathfrak{D})_{xy}$ 的 $S\times T(\omega)$ 的形状。首先，因为 ω 的支集在 $X\times Y$ 中有界，所以适当选取 X 与 Y 中

的有界閉集 M, N, 就能使得

$$\mathrm{Car}(\omega)\subset M\times N. \tag{24.1}$$

把 $\omega(x, y)$ 的 y 看作参数,作为 x 的函数就有 $\omega\in(\mathfrak{D})_x$, 而且 ω 的支集含于 M 内。于此使 $S\in(\mathfrak{D})'_x$ 作用之后的值

$$S(\omega)=\int S(x)\omega(x, y)dx \quad [\text{形式的积分}]$$

关于参数 y 連續: 因为当 $y\to\eta$ 时产生 $(\mathfrak{D})_x$ 的伪收斂 $\omega(x, y)\to\omega(x, \eta)$. 同理,存在有普通意义的微系数

$$\frac{\partial}{\partial y_i}S(\omega)=S\left(\frac{\partial\omega}{\partial y_i}\right), \tag{24.2}$$

这也是关于 y 連續。以形式的积分书写出来, 就是‘积分号下的’微分法

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\int S(x)\omega(x, y)dx=\int S(x)\frac{\partial\omega(x, y)}{\partial y_i}dx.$$

微分法(24.2)继續若干回,一般关于高阶微分法也有

$$D_yS(\omega)=S(D_y\omega), \tag{24.3}$$

$S(\omega)$ 是 y 的 C^∞ 級函数。y 若在前見(24.1)的 N 之外, 則 $S(\omega)=S(0)=0$. 由此可知, y 的函数 $S(\omega)$ 的支集含于 N 中, 于是 $S(\omega)\in(\mathfrak{D})_y$.

定理 24.1 由 $S\in(\mathfrak{D})'_x$ 所規定的映象

$$(\mathfrak{D})_{xy}\ni\omega\Rightarrow S(\omega)\in(\mathfrak{D})_y$$

綫性而且連續。

証明 其綫性性质极为明显。为証其連續性, 只要証明对于 $(\mathfrak{D})_{xy}$ 中的伪收斂 $\omega_j\to0$ 有 $(\mathfrak{D})_y$ 中的收斂

$$S(\omega_j)\to0 \tag{24.4}$$

即可 [定理 9.1]。按伪收斂的定义, ω_j 的支集全都含于某一定的有界集內, 因之(24.1)的 M, N 能取为对于所有的 $\omega=\omega_j$ 共同适用。这时作为 x 的函数而有 $\omega_j\in(\mathfrak{D}_M)$, 作为 y 的函数而有

$S(\omega_j)\in(\mathfrak{D}_N)$。若固定 y，则有 $\omega_j\to 0$ in $(\mathfrak{D}_M)$，从而对于各个 y，(24.4)成立。实际这对所有的 y 乃是均等的：这因为，对于 $\varphi\in(\mathfrak{D}_M)$ 而 $S(\varphi)$ 由有限个基本拟范数 $\|D_x\varphi\|_\infty$ 所控制，即如

$$|S(\varphi)|\leqslant a\cdot\max\|D_x\varphi\|_\infty \quad [a=\text{const}],$$

参看(24.3)，则得同样的一致收敛 $D_yS(\omega_j)\to 0$，因之(24.4)乃是在 $(\mathfrak{D}_N)$ 中的收敛，也就是在 $(\mathfrak{D})_y$ 中的收敛。 証毕

使 $T\in(\mathfrak{D})'_y$ 再一次作用于 $S(\omega)\in(\mathfrak{D})_y$，

$$(\mathfrak{D})_{xy}\ni\omega\Rightarrow T(S(\omega))$$

即成 $(\mathfrak{D})_{xy}$ 上的連續綫性泛函。換句話說，即是 $X\times Y$ 上的广义函数。$\omega\Rightarrow S(T(\omega))$ 也是同样。特别因为对于形如 $\varphi\times\psi$ 的 ω，$T(S(\varphi\times\psi))$ 及 $S(T(\varphi\times\psi))$ 与 $S(\varphi)T(\psi)$ 一致，所以根据核的唯一性，可得

定理 24.2 $S\in(\mathfrak{D})'_x$ 与 $T\in(\mathfrak{D})'_y$ 的直积 $S\times T$ 可表成

$$S\times T(\omega)=T(S(\omega))=S(T(\omega)) \quad [\omega\in(\mathfrak{D})_{xy}].$$

若用形式的积分写出，则是

$$\int S(x)T(y)\omega(x,y)\,dx\,dy=\int T(y)\left[\int S(x)\omega(x,y)\,dx\right]dy$$
$$=\int S(x)\left[\int T(y)\omega(x,y)\,dy\right]dx.$$

把这个結果称为关于广义函数直积的一般化了的 Fubini 定理頗为恰当。若引用构造定理，则此定理以及定理24.1可从 S, T 皆为連續函数的情形导出。把 S 固定，可得綫性映象

$$(\mathfrak{D})'_y\ni T\Rightarrow S\times T\in(\mathfrak{D})'_{xy},$$

而且这个映象連續。这是因为，根据 $S\times T(\omega)=T(S(\omega))$，这正是定理 24.1 中的映象的共轭映象[§ 13]的緣故。不难了解，調換 S, T 之后，

$$(\mathfrak{D})'_x\ni S\Rightarrow S\times T\in(\mathfrak{D})'_{xy}$$

仍是連續的綫性映象。

因此，根据定理 24.1 及定理 24.2，可得

定理 24.3 双綫性映象

$$(\mathfrak{D})'_x \times (\mathfrak{D})'_y \ni (S, T) \Rightarrow S \times T \in (\mathfrak{D})'_{xy}$$

分离連續。把$(\mathfrak{D})'$一齐换为$(\mathfrak{E})'$亦同[因定理 24.1 亦能同样变形]。

实則 $S\times T$ 关于 S, T 的組(S, T)連續，但其証明从略❶。在实用上，很多情形能用强收斂定理代替連續性。

从一般化了的 Fubini 定理易知下列的事实。

例 24.1 置于点 a 的单位质量 $\delta_a \in (\mathfrak{D})'_x$ 与置于点 b 的单位质量 $\delta_b \in (\mathfrak{D})'_y$ 的直积是

$$\delta_a \times \delta_b = \delta_c \quad [c = (a, b)].$$

为便于了解則能写成 $\delta_a(x)\delta_b(y) = \delta_{a,b}(x, y)$.

例 24.2 在(x, y)平面的 x 軸上，因綫密度 $f(x)$ 而导致的质量分布

$$\mu: \quad \mu(\omega) = \int f(x)\omega(x, 0)\,dx$$

正是直积 $f(x)\delta(y)$.

在同 $Y = R^n$ 的直积空間 $X\times Y$ 中的广义函数 $\bar{S} = S(x)\delta(y)$ 称为 $S \in (\mathfrak{D})'_x$ 的 Schwartz 方式的扩充。根据 Fubini 定理則有

$$\bar{S}(\omega) = \int S(x)\,\omega(x, 0)\,dx \quad [\omega \in (\mathfrak{D})_{xy}].$$

把 $X\times Y$ 的子空間 $y=0$ 及 X 看作等同的亦无不可。垂直于这一方向的任意阶的微系数

$$D_y^p \bar{S} = S(x)\,D^p\delta(y) = S(x)\,\delta^{(p)}(y)$$

的支集含于子空間 $y=0$ 的里面。关于这样的微系数的和亦是如此，然而相反地有

定理 24.4 $X\times Y = X\times R^n$ 的广义函数 W 的支集含于子空間 $y=0$ 时，W 能唯一地表为

$$W = \sum_p S_p(x)\,\delta^{(p)}(y) \quad [S_p \in (\mathfrak{D})'_x]$$

---

❶ 参看 Schwartz, L.: Théorie des distributions, Tome 1, Chap. IV, §4。——校者注

的形状。这个和是局部的有限和❶。

且把这样的 W 叫做置于子空間 $y=0$ 的多重层(multi-layer)。这个定理乃是定理 21.7 的扩充，利用定理 21.7 可得証明。

本定理的証明依据在前章重复使用的局部化的方法，对于具有有界支集的 W 进行即可。这时 W 的阶数 $m<\infty$ [定理 21.1]。今以 W 为核，对于 $\varphi\in(\mathscr{D})_x$ 使

$$\tilde{\varphi}=\int W(x, y)\varphi(x)dx \quad [\in(\mathscr{D})'_y]$$

与之相应。根据假定，显見 $\tilde{\varphi}$ 的支集乃是 Y 的原点[或說，$\tilde{\varphi}=0$ 时，則成空集]，$\tilde{\varphi}$ 的阶数 $\leqslant m$. 因之，根据定理 21.7，$\tilde{\varphi}$ 可表成

$$\tilde{\varphi}(\psi)=\sum_{|p|\leqslant m} a_p\delta^{(p)}(\psi) \quad [\psi\in(\mathfrak{D})_y],$$

如在定理 21.7 的証明中所見，

$$a_p=(-1)^{|p|}\tilde{\varphi}(\psi_p)/p!, \quad \psi_p(y)=y^p.$$

以 W 为核，对于 $\psi_p\in(\mathfrak{E})_y$ 使 $\tilde{\psi}_p\in(\mathfrak{E})'_x$ 与之对应，則得

$$\tilde{\varphi}(\psi_p)=W(\varphi\times\psi_p)=\tilde{\psi}_p(\varphi),$$

$$a_p=S_p(\varphi), \quad 但其\ S_p=\frac{(-1)^{|p|}}{p!}\tilde{\psi}_p\in(\mathfrak{D})'_x,$$

$$W(\varphi\times\psi)=\tilde{\varphi}(\psi)=\sum_{|p|\leqslant m} S_p(\varphi)\delta^{(p)}(\psi).$$

从而 $W=\sum S_p\times\delta^{(p)}$. 唯一性則由导出結論的方法可明。 証毕

注意 这个定理，依据次节的变数更换与局部化的手續，可变成种种的形式。例如 (x, y) 平面上广义函数 W 的支集位于单位圓周 C 上时，若把直交坐标 (x, y) 轉变为极坐标 (r, θ)，W 在 C 的邻域中就成为下列形状：

$$W=\sum_p S_p(\theta)\cdot\delta^{(p)}(r-1).$$

考虑一种可称作把 $S\in(\mathfrak{D})'_x$ 引伸于 y 方向[或者'与 Y 平行'地]的广义函数。就是 $S(x)1(y)=S\times 1\in(\mathfrak{D})'_{xy}$; 这里 $1(y)$ 乃是在 Y 上恒等于 1 的函数。例如，所以能把 $x\in X$ 的局部可积函数 $f(x)$ 看成是 (x, y) 的函数，就是因为可把它了解为 $f(x)1(y)$. 仿此，$S(x)1(y)$ 也常略写为 $S(x)$. 根据 Fubini 定理，則有

❶ 对于 X 中的有界开集，除去有限个 p 則 $S_p=0$.

$$S\times 1(\omega)=\int\left[\int S(x)\omega(x,y)dx\right]dy=\int S(x)\left[\int\omega(x,y)dy\right]dx.$$

利用这个'引伸'，如在§4末尾所提到的，就可把 $X\times Y=X\times R^1$ 的偏微分方程

$$\partial T/\partial y=U$$

的通解表达出来。設§4所得的那种特解为 T_0，則通解就成为

$$T=T_0+S(x)1(y),\quad S\text{ 是 }X\text{ 上的任意广义函数。}$$

实則，依据卷积的微分法卽知

$$\frac{\partial S\times 1}{\partial y}=S\times\frac{d1}{dy}=S\times 0=0,$$

然而，相反地，也能証明使 $\partial W/\partial y=0$ 的 $W\in(\mathfrak{D})'_{xy}$ 可表为

$$W=S\times 1.$$

証明 对以 W 为核的 $\varphi\in(\mathfrak{D})_x$，使 $\tilde{\varphi}\in(\mathfrak{D})'_y$ 与之对应，根据在§22末尾所述的积分号下的微分法，則有

$$\frac{d\tilde{\varphi}}{dy}=\int\frac{\partial W(x,y)}{\partial y}\varphi(x)dx=\int 0\,\varphi\,dx=0.$$

因之，如在§4所見，当 $\tilde{\varphi}=c=\text{const}$ 时，

$$\tilde{\varphi}(\psi)=\int c\psi(y)dy\quad[\psi\in(\mathfrak{D})_y],$$

其中 c 依賴于 φ. 因为 $\varphi\Rightarrow\tilde{\varphi}$ 旣綫性且連續，所以 $\varphi\Rightarrow c$ 也是如此。于是，把这个 c 写为 $S(\varphi)$ 則得 $S\in(\mathfrak{D})'_x$. 而且

$$W(\varphi\times\psi)=\tilde{\varphi}(\psi)=\int S(\varphi)\psi(y)dy$$

$$=\int S(x)1(y)\varphi(x)\psi(y)dx\,dy,$$

故 $W=S\times 1$. 証毕

广义函数 $S\in(\mathfrak{D})'_x$ 对于 x 的若干坐标 x_i 有 $\partial S/\partial x_i=0$ 时，就說 S 与这些 x_i 无关。$Y=R^n$ 时，与 y 无关的 $W\in(\mathfrak{D})'_{xy}$ 的一般形

式，利用 X 上的任意广义函数 S 可表为

$$W=S(x)1(y_1)\cdots1(y_n)=S(x)1(y).$$

当 Y 是 R^n 中的連通开集时，也能得到同样的一般形式

$$W=S(x)1(y).$$

§25 代入，变数更换

給定了 x 的函数 $f(x)$ 及映象

$$F:\quad Z\ni z\Rightarrow F(z)=x\in X$$

时，經过代入，产生复合函数 $f(F(z))$，現在对广义函数 $S(x)$ 卽 $S\in(\mathfrak{D})'_x$ 考虑与此相当的問題，并且适当地来定义 $S(F(z))\in(\mathfrak{D})'_z$。但假設映象 F 为 C^∞ 級，卽 x 的各坐标为 z 的 C^∞ 級的函数，并設存在連續映象

$$(\mathfrak{D})_z\ni\varphi\Rightarrow\tilde{\varphi}\in(\mathfrak{D})_x,$$

对于 X 上任意的局部可积函数 f，恒有

$$\int f(x)\tilde{\varphi}(x)dx=\int f(F(z))\varphi(z)dz. \tag{25.1}$$

这个条件(25.1)，只要当 f 为連續函数时成立，則一般的也成立。

例 25.1 由 $X\times Y$ 到 X 的正射影 F[卽$(x,y)\Rightarrow x$]具有上述性质：

$$\tilde{\varphi}(x)=\int\varphi(x,y)dy.$$

例 25.2 設 C^∞ 級的变数更换 $x=F(z)$ 具有 C^∞ 級逆更换 $z=G(x)$，把它看作映象 $z\Rightarrow x$，設逆更换的 Jacobi 算符(Jacobian)为 Dz/Dx，如置

$$\tilde{\varphi}(x)=\varphi(G(x))\left|\frac{Dz}{Dx}\right|,$$

則适合上列条件。

姑且把伴随 F 的上列的映象 $\varphi\Rightarrow\tilde{\varphi}$ 写做

$$\{F\}:\quad(\mathfrak{D})_z\ni\varphi\Rightarrow\{F\}\varphi=\tilde{\varphi}\in(\mathfrak{D})_x.$$

根据(25.1),显見映象 $\{F\}$ 是唯一确定而且是綫性的。因其既为連續映象,故当 $S\in(\mathfrak{D})'_x$ 时,置

$$T(\varphi)=S(\tilde{\varphi}) \tag{25.2}$$

则得 $T\in(\mathfrak{D})'_z$。这个对应 $S\Rightarrow T$ 是 $\{F\}$ 的共轭映象

$$\{F\}^*:\quad (\mathfrak{D})'_x\ni S\Rightarrow\{F\}^*S=T\in(\mathfrak{D})'_z;$$

所以是綫性且連續的。特别如 S 是局部可积函数 f,則 (25.1) 的左端成为 $T(\varphi)$,而且通过 $g(z)=f(F(z))$ 可以表成

$$T(\varphi)=\int g(z)\varphi(z)dz,$$

因此即得 $T=g$。于是,又能把对于一般 S 的 $T=\{F\}^*S$ 写成 $S(F(z))$。如以形式的积分写出来,則是

$$\int S(F(z))\varphi(z)dz=\int S(x)\tilde{\varphi}(x)dx. \tag{25.2'}$$

例 25.3 把正射影 $F(x,y)=x$ 代入,則得

$$T(x,y)=S(F(x,y))=S(x)1(y).$$

这就是 §24 簡写法 $S(x)=S(x)1(y)$ 的意义。这个簡写法在代入过程中不会引起混淆。例如,由簡写法 $T(x,y)=S(x)$ 可以推想代入公式

$$T(H(w),K(w))=S(H(w))$$

实际成立。如置 $G(w)=(H(w),K(w))$,这个代入公式可由后述一般的(25.3)导出。

例 25.4 反轉 $\check{S}(x)=\sigma S(x)=S(-x)$,平移 $\tau_a S(x)=S(x-a)$ 也可視为代入的結果。

根据代入映象 $S\Rightarrow S(F(z))=\{F\}^*S$ 的連續性,容易导出它的基本性质。例如,特别当 $S\in(\mathfrak{D})_x$ 时,

$$\frac{\partial}{\partial z_k}S(F(z))=\sum_i\frac{\partial x_i}{\partial z_k}\cdot\frac{\partial S}{\partial x_i}(F(z)),$$

将上式改写成

$$\frac{\partial}{\partial z_k}\{F\}^*S=\sum_i\frac{\partial x_i}{\partial z_k}\cdot\{F\}^*\frac{\partial S}{\partial x_i},$$

它的两端仅是用連續的广义函数运算所組成。因此，如轉向极限，則关于一般的 $S\in(\mathfrak{D})'_z$，上面的公式也成立。

以同样的方法也可闡明如下的事实。把因重复代入而得的 $S(F(G(w)))$ 看作

$$S\Rightarrow T=S(F(z))\Rightarrow T(G(w))=S(F(G(w))),$$

或視为 $H(w)=F(G(w))$ 的代入，得

$$T(G(w))=S(H(w)).\tag{25.3}$$

又当 $S\in(\mathfrak{D})'_{R^n}$ 时，以 $U(x,y)=S(x-y)$ 为核，所作的

$$\tilde{\varphi}(x)=\int U(x,y)\varphi(y)dy$$

是与 $S*\varphi$ 一致的。

这样一来，向广义函数的代入与向函数的代入可用大致相同的方法处理。例如，設 R^{2n} 上坐标为

$$(u,v)=(u_1,\cdots,u_n,v_1,\cdots,v_n)$$

的方程組

$$\frac{\partial W(u,v)}{\partial u_i}=\frac{\partial W(u,v)}{\partial v_i}\quad[i=1,\cdots,n],\tag{25.4}$$

因变数更换 $u=x-y$, $v=y$，則成

$$\partial W(x-y,y)/\partial y_i=0,\tag{25.4'}$$

其通解，如在§24所見，乃是

$$W(x-y,y)=U(x)1(y),$$

或者，以逆变换返回 u, v，則得

$$W(u,v)=U(u+v).$$

U 是对于 W 唯一确定的。

还有，根据定理4.1可知，(25.4)即(25.4′)与如下的性质等价：对于所有的 $a\in R^n$，

$$\tau_{a,0}W=\tau_{0,a}W,$$

即是 $W(u-a, v)=W(u, v-a)$. 利用这个事实，就很容易作出 C. Chevalley 意义下的卷积的一般化。这就是次节的主要内容。

§26 一般卷积

所謂 R^n 上的广义函数 S, T 在新的意义下可卷合的意义是指，对所有的 $\varphi, \psi\in(\mathfrak{D})_{R^n}$, 必有

$$\int |S*\varphi(-x)\cdot T*\psi(x)|dx<\infty. \qquad (26.1)$$

把这个条件中的 S, T 調換了也是同样。这时因为 φ, ψ 的反轉 $\check{\varphi}, \check{\psi}$ 也都属于 $(\mathfrak{D})$, 所以有限积分

$$B(\varphi, \psi)=\int S*\check{\varphi}(-x)\cdot T*\check{\psi}(x)dx \qquad (26.2)$$

即能确定，且是 (φ, ψ) 的双綫性泛函。

特别，在 §13 中部，能定义卷积 $V=S*T$ 的 S, T[S, T 的支集都有界]就在上述意义下可卷合，利用簡單的变数更换可得

$$B(\varphi, \psi)=\int V(u+v)\varphi(u)\psi(v)du\,dv. \qquad (26.3)$$

又如在 §15 所見，能够定义函数卷积 $f*g$ 的局部可积函数 f, g, 若把它們看作广义函数 $S=f, T=g$, 則也是在上述意义下可卷合的。因此就将下列定理中的 V 称为一般卷积 $S*T$.

定理 26.1 根据(26.2)，由可卷合的 S, T 所确定的泛函 B, 用核广义函数 $W\in(\mathfrak{D})'_{uv}$ 可表为

$$B(\varphi, \psi)=W(\varphi\times\psi)=\int W(u, v)\varphi(u)\psi(v)du\,dv$$

的形狀，W 可表为 $W(u, v)=V(u+v)$ 的形狀[$V\in(\mathfrak{D})'_{R^n}$]. 这样的 V 对 S, T 是唯一确定的。

証明 仅証明前半，因为唯一性是明显的。

第一段。把 ψ 固定，再置 $L(\varphi)=B(\varphi, \psi)$，则有

$$L(\varphi)=\lim_{k\to\infty}\int_{|x|\le k} S*\check{\varphi}(-x)\cdot T*\check{\psi}(x)dx.$$

把 lim 内的积分写为 $L_k(\varphi)$. 因为 $(\mathfrak{D})\ni\varphi\Rightarrow S*\check{\varphi}\in(\mathfrak{E})$ 是綫性且連續[例 9.1]的对应，所以 $\varphi\Rightarrow L_k(\varphi)$ 也是这样，其 $L_k\in(\mathfrak{D})'$. 从而根据单純收斂定理可知 $L\in(\mathfrak{D})'$，于是 $B(\varphi, \psi)$ 关于 φ 連續。同样，$B(\varphi, \psi)$ 关于 ψ 亦連續。由此可見，B 能用核广义函数表达。

第二段。对于任意的 $a\in R^n$，容易获得

$$B(\tau_{-a}\varphi, \psi)=B(\varphi, \tau_{-a}\psi).$$

把这个关系用 W 改写之后，再把平移推出(　)之外，则成

$$\tau_{a,0}W(\varphi\times\psi)=\tau_{0,a}W(\varphi\times\psi),$$

根据核的唯一性，有 $\tau_{a,0}W=\tau_{0,a}W$. 因此，W 就有 $W(u, v)=V(u+v)$ 的形状。　　証毕

仿照第一段的証明，也能知道

$$\rho:\quad \rho(\varphi)=\int|S*\varphi(-x)\cdot T*\psi(x)|dx$$

是 $(\mathfrak{D})$ 上的連續拟范数；不过这里以 sup 代替了 lim. 然而 $\rho(\varphi)$ 是 x 的函数 $S*\varphi(-x)\cdot T*\psi(x)$ 的 L^1 范数。故得

定理 26.2　由可卷合的 S, T 以及 $\psi\in(\mathfrak{D})$ 所决定的綫性映象

$$(\mathfrak{D})\ni\varphi\Rightarrow f_\varphi\in L^1:\ f_\varphi(x)=S*\varphi(-x)\cdot T*\psi(x)$$

連續。

又因对应 $R^n\ni y\Rightarrow\tau_y\varphi\in(\mathfrak{D})$ 也連續，所以

$$h(y)=\int|S*\varphi(y-x)\cdot T*\psi(x)|dx\quad[=\rho(\tau_y\varphi)]$$

是 y 的連續函数。于是 § 15 意义下的函数卷积 $(S*\varphi)*(T*\psi)$ 就确定了。但如在定义一般卷积 $V=S*T$ 的(26.3)中，把 φ, ψ 反

轉一下，則得

$$\int S*\varphi(-x)\cdot T*\psi(x)dx=\int(S*T)*\varphi(-v)\cdot\psi(v)dv; \quad (26.4)$$

在右端利用了关于广义函数直积的 Fubini 定理。这里如向 φ 代入 $\tau_y\varphi$，則变成

$$(S*\varphi)*(T*\psi)=(S*T)*\varphi*\psi. \quad (26.5)$$

这一公式表达了一般卷积 $S*T$ 的特征。由此容易得到如下的各公式❶：

$$(\tau_a S)*T=S*\tau_a T=\tau_a(S*T),$$

$$(DS)*T=S*DT=D(S*T) \quad [D\text{ 是定系数微分算子}],$$

$$(S*\alpha)*T=S*(T*\alpha)=(S*T)*\alpha \quad [\alpha\in(\mathfrak{D})],$$

这样，各端的（ ）就不需要了。又对任意常数 a，b，有

$$(aS_1+bS_2)*T=a\cdot S_1*T+b\cdot S_2*T,$$

但其中 $a\cdot S*T$ 表示 $S*T$ 的 a 倍。

例 26.1 当 $S\in(\mathfrak{D})'_{R^n}$ 的支集'左側有界'即含于形如

$$x_1\geqslant a, \cdots, x_n\geqslant a$$

的范圍内时，它与 $\varphi\in(\mathfrak{D})$ 的卷积 $S*\varphi$ 的支集也是左側有界。这时 $f(x)=S*\varphi(-x)$ 的支集'右側有界'。就是說 f 的支集含于形如

$$x_1\leqslant b, \cdots, x_n\leqslant b$$

的范圍内。这时，如取支集为左側有界的連續函数 g，則 $|f(x)g(x)|$ 就是可积的。因此，当 S 与 T 的支集皆左側有界——或者，皆右側有界——时，S 与 T 就是可卷合的。特别在 R^1 上，設 $a<b$，取形如

$$\alpha(x)=0 \quad [x<a], \qquad \alpha(x)=1 \quad [x>b]$$

的 C^∞ 級函数 α，对任意的 $S\in(\mathfrak{D})'_{R^1}$ 能够作出

$$V=Y*\alpha S-\check{Y}*(1-\alpha)S.$$

$Y*\alpha S$ 是 $Y*(\alpha S)$ 的簡略表示。这个 V 就是 S 的'原广义函数'，即 $V'=S$. 特

❶ 假如第三端具有意义，其他各端也都有意义。

别如 S 是局部可积函数 f，則 V 即成連續函数，且有

$$V(x)=\int_0^{\infty}\alpha(x-y)f(x-y)dy-\int_{-\infty}^{0}(1-\alpha(x-y))f(x-y)dy$$

$$=\int_a^x f(t)dt-\int_a^b(1-\alpha(t))f(t)dt.$$

虽在 R^n 上，以 $Y(x_1)\delta(x_2,\cdots,x_n)$ 代 Y，同样能給出 $\partial V/\partial x_1=S$ 的一个解 V.

例 26.2　与上述 $\alpha\in(\mathfrak{D})$ 的 $S*T*\alpha$ 的情形相反，对于一般 $U\in(\mathfrak{D})'$，$(S*T)*U=S*(T*U)$——纵然两端都有意义——不必成立。譬如在 R^1 上，由 $\delta'*S=S'$ 即得出

$$(1*\delta')*Y=0*Y=0,\quad 1*(\delta'*Y)=1*\delta=1.$$

現在給出使結合律成立的充分条件。先作如下的准备。

定理 26.3　設已給定 S,T，对于所有的 $\alpha\in(\mathfrak{D})$，如 $S*\alpha$ 与 T 可卷合，則 S 与 T 也可卷合。

証明　設 R^n 中的任意閉球 $|x|\leqslant r$ 为 K，对于任意的 φ，$\psi\in(\mathfrak{D}_K)$，如能闡明 $x\in R^n$ 的函数 $S*\varphi(-x)\cdot T*\psi(x)$ 的可积性，就得到了定理的証明。設 $\alpha\in(\mathfrak{D}_K)$，依据假定，$x$ 的函数

$$f(x)=S*\alpha*\varphi(-x)\cdot T*\psi(x)$$

可积。根据定理 26.2，对应

$$(\mathfrak{D}_K)\times(\mathfrak{D}_K)\ni(\alpha,\varphi)\Rightarrow B(\alpha,\varphi)=f\in L^1$$

关于 φ，是綫性且連續。由于 $B(\alpha,\varphi)=B(\varphi,\alpha)$，这个对应关于 α 也是綫性且連續，从而[定理 22.1]它关于 (α,φ) 是分离連續的。因为 $(\mathfrak{D}_K)$ 可距离化，所以，按照定理 22.3，$B(\alpha,\varphi)$ 关于組 (α,φ) 連續，而且 f 的 L^1 范数 $\|f\|_1$ 能控制如下：

$$\|f\|_1=\|B(\alpha,\varphi)\|_1\leqslant a\cdot\rho(\varphi)\cdot\rho(\alpha),\quad a=\text{const},$$

$$\rho(\alpha)=\max_{|p|\leqslant m}\|D^p\alpha\|_\infty.$$

試取迭次 Laplace 算符的参函数 E，使 E 的支集含于 K 的內部，并設

$$\delta=\Delta^k E+\omega,\quad \omega\in(\mathfrak{D}_K),\quad E\in(\mathfrak{D}^m).$$

利用 E 的正则化，就能得到

$$\rho(\alpha_j-E)\to 0$$

的序列 $\alpha_j\in(\mathfrak{D}_K)$。按照上面的不等式，便知 $f_j=B(\check{\alpha}_j,\varphi)$ 在 L^1 具有极限 g. 又于各点

$$f_j(x)\to h(x)=S*E*\varphi(-x)\cdot T*\psi(x).$$

因此，$h=g\in L^1$. 把 $\Delta^k\varphi$ 代入于 φ，就能知道 $S*E*\Delta^k\varphi(-x)\cdot T*\psi(x)$ 也是可积。但从 $\delta=\Delta^kE+\omega$ 可得

$$S*\varphi=S*\delta*\varphi=S*E*\Delta^k\varphi+S*\omega*\varphi.$$

据此，$S*\varphi(-x)\cdot T*\psi(x)$ 能分解成

$$S*E*\Delta^k\varphi(-x)\cdot T*\psi(x)+S*\omega*\varphi(-x)\cdot T*\psi(x),$$

因其各项皆可积，故 $S*\varphi(-x)\cdot T*\psi(x)$ 亦可积。 証毕

定理 26.4 假設 S 与 T 可卷合，T 与 U 可卷合，对于所有的 $\alpha,\beta,\gamma\in(\mathfrak{D})$，

$$f(x,y)=S*\alpha(-x)\cdot T*\beta(x-y)\cdot U*\gamma(y)$$

是 (x,y) 的可积函数。这时，S 与 $T*U$，$S*T$ 与 U 都可卷合，而且

$$(S*T)*U=S*(T*U).$$

这一定理的証明要使用可积函数 $f(z)\,[z=(x,y)]$ 的 Fubini 定理。先置 $V=S*T*\beta$，则有 $V*\alpha=(S*\alpha)*(T*\beta)$. 由此得到

$$V*\alpha(-y)=\int S*\alpha(x)\cdot T*\beta(-y-x)dx,$$

$$V*\alpha(-y)\cdot U*\gamma(y)=\int f(x,y)dx,$$

$$\int|V*\alpha(-y)\cdot U*\gamma(y)|dy\leqslant\int|f(z)|dz<\infty,$$

于是 V 与 U 可卷合，且有

$$\int V*U(u+v)\cdot\check{\alpha}(u)\check{\gamma}(v)du\,dv=\int f(z)dz.$$

因为 $V=S*T*\beta$，由前定理可知 $S*T$ 与 U 可卷合。同样可知 S 与 $T*U$ 也可卷合，而且关于 $W=T*\beta*U$ 也有

$$\int \dot{S}*W(u+v)\cdot\check{\alpha}(u)\check{\gamma}(v)\,du\,dv=\int f(z)\,dz.$$

因此根据定理 26.1 的唯一性可知 $V*U=S*W$，即[$*\beta$ 可移到任意的地方]

$$(S*T)*U*\beta=S*(T*U)*\beta.$$

使 β 收敛 [in $(\mathfrak{D}')$] 于 Dirac 测度 δ，即得結合律 $(S*T)*U=S*(T*U)$。 證毕

第5章　Fourier 級数　Fourier 变换

所謂 R^1 上的广义函数 S 是周期为 2π 的周期广义函数是指：虽把 φ 平移 2π 而 $S(\varphi)$ 不变。这也可看做是圓周上的广义函数。能够証明，周期广义函数仅能展为系数序列迟緩增加的 Fourier 級数，反之，这样的 Fourier 系数又能决定周期广义函数。这固然能作为特殊的 Fourier 变换处理，但不如直接着手較为鮮明。为了使 Fourier 变换具有象 L^2 的情况那样的对称性，把接受变换的广义函数限定于'緩增'的范圍。这在古典的 L^p 之外还含有多項式等，某种程度的运算在該范圍内可以自由行施。但在解微分方程之类的問題时，若不留意'緩增'的假定，就連在求积法中立即可得的解也可能遺漏。

§27　环圓上广义函数的 Fourier 展开

n 維环面 T^n 是由于无視坐标的整数差，也就是由于各坐标以 mod 1 考虑而得出的。从而，$X=T^n$ 上的函数 f 就是在 R^n 上具有各坐标軸方向的周期 1 的函数 F，积分則由

$$\int f(x)dx=\int_X f(x)dx=\int_0^1\cdots\int_0^1 F(x)\,dx_1\cdots dx_n$$

給定。以下暂在 $X=T^n$ 中考虑問題。这时 $(\mathfrak{D})$ 与 $(\mathfrak{E})$ 的区别就消失了，于是 $(\mathfrak{D})'=(\mathfrak{E})'$，因此可作任意广义函数 S，T 的卷积 $S*T$。

对于任意整数的組

$$l=(l_1,\cdots,l_n)\quad[l_i=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots],$$

$x=(x_1,\cdots,x_n)\in T^n$ 的函数

$$E_l(x)=\exp(2\sqrt{-1}\,\pi\cdot lx)$$

属于$(\mathfrak{D})$。但其中 lx 则是以 mod 1 所规定的值

$$lx=l_1x_1+l_2x_2+\cdots+l_nx_n.$$

对于 $S\in(\mathfrak{D})'$，称

$$c_l(S)=S(E_{-l})=\int S(x)E_{-l}(x)dx$$

为**广义函数 S 的 Fourier 系数**。这了解为下标也向負方向延伸的 n 重数列。在这里如引用广义函数的微分法 $S'(\varphi)=-S(\varphi')$，则有

$$c_l(\partial S/\partial x_i)=2\sqrt{-1}\,\pi l_i c_l(S).$$

又从卷积的定义 $S*\varphi(a)=S(\tau_a\check{\varphi})$ 以及 $\tau_a\check{E}_l=E_l(a)\cdot E_{-l}$，得到

$$S*E_l(a)=c_l(S)\cdot E_l(a).$$

由此作出的 n 重級数

$$\sum_l c_l(S)\cdot E_l=\sum_l S*E_l$$

叫做**广义函数 S 的 Fourier 級数**。将此看做广义函数項的級数时，其收斂则成問題。

n 重数列 a_l 被

$$|l|=\sqrt{l_1^2+\cdots+l_n^2}$$

的某乘冪所控制时，就是不問 l 如何，只要恒有滿足

$$|a_l|\leqslant M\cdot|l|^k$$

的定数 M，k 存在时，称 a_l 是緩增的。$S\in(\mathfrak{D})'$ 的 Fourier 系数 $c_l(S)$ 是緩增的。这是因为，首先对于 $\varphi\in(\mathfrak{D})=(\mathfrak{E})$ 的 $S(\varphi)$ 的值是由有限个基本拟范数

$$\rho^p(\varphi)=\|D^p\varphi\|_\infty=\max_x|D^p\varphi(x)|$$

所控制：

$$|S(\varphi)|\leqslant N\cdot\max_p\rho^p(\varphi),\quad N=\text{const}.$$

阶数$\|p\|$的最大値如設为 k，則有 $\rho^p(E_{-l})\leqslant(2\pi|l|)^k$，于是

$$|c_l(S)|=|S(E_{-l})|\leqslant(2\pi)^k N\cdot|l|^k.$$

相反，任意的緩增 n 重数列 a_l 可表为

$$a_l=c_l(S),\quad S\in(\mathfrak{D})'. \tag{27.1}$$

为了获得这样的 S，对于 $\varphi\in(\mathfrak{D})$，命

$$S(\varphi)=\sum_l a_l E_l(\varphi)=\sum_l a_l\int E_l(x)\varphi(x)dx$$

卽可。如果能够証明这个級数恒为絕对收斂，則(27.1)的成立就很明显[根据收斂定理 $S\in(\mathfrak{D})'$]。

絕对收斂的証明：因 a_l 緩增，如取充分大的自然数 m，卽得

$$b=\sum_{l\neq0}|a_l|/(-2\pi|l|)^{2m}<\infty,$$

然因关于 m 重 Laplace 算符 Δ^m 有

$$E_l(\Delta^m\varphi)=\Delta^m E_l(\varphi)=(-2\pi|l|)^{2m}E_l(\varphi),$$

所以

$$|E_l(\varphi)|\leqslant\int|\Delta^m\varphi(x)|dx/(2\pi|l|)^{2m},$$

于是得到

$$\sum_l|a_lE_l(\varphi)|\leqslant|a_0E_0(\varphi)|+b\int|\Delta^m\varphi(x)|dx<\infty.$$

証毕

現在，从任意的 $S\in(\mathfrak{D})'$，利用緩增的 $a_l=c_l(S)$，試作

$$S_0=\sum_l c_l(S)\cdot E_l. \tag{27.2}$$

右端，把各項任意排成一列时，按 $(\mathfrak{D})'$ 拓扑强收斂[根据强收斂定理可明]。此时 S 与 S_0 之差的 Fourier 系数为

$$c_l(S-S_0)=c_l(S)-c_l(S_0)=0.$$

由此可見，$T=S-S_0$ 为 0，从而

$$S=\sum_l c_l(S)\cdot E_l.$$

$T=0$ 的証明：如所周知，关于連續函数 f，如果 $c_l(f)$ 都是 0 則 $f=0$。若取任意的 $\alpha\in(\mathfrak{D})$，置 $f=T*\alpha$，則有

$$c_l(f)E_l=f*E_l=T*E_l*\alpha=c_l(T)E_l*\alpha=0.$$

故 $c_l(f)=0$。从而 $f=0$。这里如使 α 趋近于 δ，則有

$$T=\lim_{\alpha\to\delta}T*\alpha=0.$$

Fourier 展开关于直积 $X\times Y=T^n\times Y$ 上的广义函数 $U(x,y)$ 也能适用；Y 不必須是环面。这时利用广义函数系数 $A_l\in(\mathfrak{D})'_y$ 能把 U 表为

$$U=\sum_l E_l\times A_l=\sum_l E_l(x)A_l(y)$$

的形状，这个級数与(27.2)同样，与項的次序不相关地收斂。为得到这种表示，置

$$A_l=\int U(x,\ y)E_{-l}(x)dx$$

即可。实际上，对于 $(\varphi,\ \psi)\in(\mathfrak{D})_x\times(\mathfrak{D})_y$，显見有

$$U(\varphi\times\psi)=\sum_l E_l(\varphi)A_l(\psi)=\sum_l E_l\times A_l(\varphi\times\psi).$$

因此，从定理 23.4 可知

$$V=\sum_l E_l\times A_l$$

的右端收斂而 $V\in(\mathfrak{D})'_{xy}$，又由核的唯一性可知 $U=V$。

例 27.1　T^n 上的 Dirac 測度

$$\delta(x)=\sum_l E_l(x)=\sum_l\exp(2\sqrt{-1}\,\pi\cdot lx).$$

例 27.2　$T^1\times R^1$ 上的广义函数項級数

$$E(x,y)=\sum_l E_l(x)\cdot\exp(-l^2\pi^2y)\cdot Y(y)$$

显然是收斂的。把 R^1 視为时間軸，則 $E(x,\ y)$ 是 T^1 上的'瞬时点热源'。 即

$$\partial E/\partial y-\partial^2E/\partial x^2=\sum_l E_l(x)\delta(y)=\delta(x)\delta(y)=\delta(x,\ y).$$

从而与 $f(x)\delta(y)$ 的卷积

$$\begin{aligned}u=E*(f\times\delta)&=\sum E_l*f(x)\cdot\exp(-l^2\pi^2y)\cdot Y(y)\\&=\sum c_l(f)\cdot E_l(x)\exp(-l^2\pi^2y)Y(y)\end{aligned}$$

是微分方程

$$\partial u/\partial y-\partial^2u/\partial x^2=f(x)\delta(y)$$

的解，当 $y<0$ 时，$u=0$。若对 u 假定适当的性质，右端的 $f(x)\delta(y)$ 可視为古典的

$$u_y-u_{xx}=0 \quad [y>0]$$

以初值条件 $u(x,0)=f(x)$ 所修正的东西，因为从在 $y<0$ 的 $u(x,y)=0$ 轉移到 $y>0$ 的跳跃正是 $f(x)$。

注意 27.1 如上所述，微分方程的初值条件或边界条件，由于扩大范圍的方法而能看成是微分方程的修正项的这样情形是很多的。

§28 急减函数

以下以 $X=Y=R^n$ 为基础空間，$x\in X$ 及 $y\in Y$ 的內积用 xy 表示：

$$xy=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n. \tag{28.1}$$

对于 x 的可积函数 $f(x)$，称 y 的函数

$$\mathscr{F}f(y)=\int f(x)\exp(-2\sqrt{-1}\pi\cdot xy)dx$$

为 f 的 **Fourier 变换**，也可写成 $\mathscr{F}_x[f(x)](y)$. $\mathscr{F}f=\mathscr{F}_x[f(x)]$ 是 R^n 上的有界函数：

$$|\mathscr{F}f(y)|\leqslant\int|f(x)|dx=\|f\|_1. \tag{28.2}$$

又据 Lebesgue 的极限定理[1] 可知，$y\to a$ 时 $\mathscr{F}f(y)\to\mathscr{F}f(a)$。这就說，$\mathscr{F}f$ 是連續函数。

如果連 g 也是 R^n 上的可积函数，则根据 Fubini 定理，得

$$\int\mathscr{F}f(y)\cdot g(y)dy=\int f(x)\cdot\mathscr{F}g(x)dx, \tag{28.3}$$

$$\mathscr{F}[f*g](y)=\mathscr{F}f(y)\cdot\mathscr{F}g(y). \tag{28.4}$$

(28.4) 也可簡写成 $\mathscr{F}[f*g]=\mathscr{F}f\cdot\mathscr{F}g$.

广义函数 S 的支集有界时，使 S 作用于 x 的 C^∞ 級函数

$$e_y(x)=\exp(-2\sqrt{-1}\pi\cdot xy)\in(\mathfrak{E})_x$$

---

[1] 参看本丛书河田敬义著《集合、拓扑、測度》p. 78。

就能定义 Fourier 变换

$$\mathscr{F}S(y)=S(e_y)=\int S(x)\exp(-2\sqrt{-1}\,\pi\cdot xy)\,dx.$$

因为 $y\to a$ 时 $e_y\to e_a$ in $(\mathfrak{E})$，所以$\mathscr{F}S(y)$是 y 的連續函数。例如

$$\mathscr{F}\delta=1,\quad \mathscr{F}_x\left[\frac{\partial\delta(x)}{\partial x_i}\right](y)=2\sqrt{-1}\,\pi y_i.$$

对于 $S\in(\mathfrak{E})'$ 及 $\psi\in(\mathfrak{D})$，相当于(28.3)的是：

$$\mathscr{F}S(\psi)=S(\mathscr{F}\psi)\tag{28.5}$$

成立。在左端是把連續函数 $\mathscr{F}S$ 看成广义函数使之作用于 ψ. 右端的 $\mathscr{F}\psi$ 不必具有有界的支集。把 $\psi\in(\mathfrak{D})$ 的 Fourier 变换 $\varphi=\mathscr{F}\psi$ 的性质的一部抽象化，借以导入'急减函数'的概念。实际就是：考虑对任意的急减函数 φ 能使 $S(\varphi)$ 适当規定的广义函数 S，然后依照(28.5)定义 $\mathscr{F}S$。

R^n 上的函数 φ **急减**——詳細地說，急減的 C^∞ 級函数——的意义如下：

φ 是 C^∞ 級函数，对于任意的 p, k,

$$\lim_{|x|\to\infty}|x|^kD^p\varphi(x)=0.\tag{28.6}$$

例如属于$(\mathfrak{D})$的函数或 $\exp(-|x|^2)$ 等都是急減的。(28.6) 如代之以

$$\sup_x(1+|x|^2)^m|D^p\varphi(x)|<\infty\quad[m=1,2,\cdots]\tag{28.7}$$

情况亦同：唯上确界依赖于 m, p. 急減函数的全体表为$(\mathfrak{S})$，$(\mathfrak{S})$形成一个向量空間，(28.7)的值

$$\rho_{m,p}(\varphi)=\sup_x(1+|x|^2)^m|D^p\varphi(x)|$$

成为 $\varphi\in(\mathfrak{S})$ 的拟范数。把这种形状的 $\rho_{m,p}$ [可数个]全作为 $(\mathfrak{S})$ 的基本拟范数。从而$(\mathfrak{S})$可以距离化。而且$(\mathfrak{S})$是完备的，拓扑的强弱$(\mathfrak{D})\prec(\mathfrak{S})\prec(\mathfrak{E})$[§ 10]亦极明显。

如果 m 取得充分大，则如所知，急減函数 φ 为可积，且能定义

Fourier 变换 $\mathscr{F}\varphi$. 又

$$\varphi \Rightarrow D^{\alpha}\varphi, \quad \varphi \Rightarrow Q\varphi \quad [Q\text{是多项式}]$$

皆都成为由(𝔖)到(𝔖)的連續綫性映象，特別有

$$\mathscr{F}_x[\partial\varphi(x)/\partial x_i](y) = 2\sqrt{-1}\,\pi y_i \mathscr{F}\varphi(y), \qquad (28.8)$$

$$\mathscr{F}_x[-2\sqrt{-1}\,\pi x_i\varphi(x)](y) = \partial\mathscr{F}\varphi(y)/\partial y_i. \qquad (28.9)$$

这里(28.8)因分部积分，(28.9)因积分号下的微分法而得。根据(28.9)，$\mathscr{F}\varphi$ 则有連續的一阶微系数，进一步，反复利用(28.9)，就能推知 $\mathscr{F}\varphi$ 实际是 C^{∞} 級的函数。更一般地，对于給定的 m 与 p，假如适当地規定坐标的单項式 Q，根据微分算子

$$D = Q\cdot\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^m$$

就能有

$$\mathscr{F}[D\varphi](y) = (1+|y|^2)^m D^p \mathscr{F}\varphi(y).$$

因为 $D\varphi$ 与 φ 同样也是急減的，所以 $\mathscr{F}[D\varphi]$ 有界；从而由上列等式可知 $\mathscr{F}\varphi \in (\mathfrak{S})$. 而且

$$\rho_{m,p}(\mathscr{F}\varphi) \leqslant \|\mathscr{F}[D\varphi]\|_{\infty} \leqslant \|D\varphi\|_1.$$

另一方面，在(28.7)中如取 m 充分大，可知当 $\psi_j \to 0$ in (𝔖) 时 $\|\psi_j\|_1$ 收斂于0. 由此及 $\varphi \Rightarrow D\varphi$ 的連續性，当 $\varphi_j \to 0$ in (𝔖) 时，

$$\|D\varphi_j\|_1 \to 0, \quad \text{从而} \quad \rho_{m,p}(\mathscr{F}\varphi_j) \to 0,$$

也就是說 $\mathscr{F}\varphi_j \to 0$ in (𝔖).

由此可見，綫性映象

$$\mathscr{F}: (\mathfrak{S}) \ni \varphi \Rightarrow \mathscr{F}\varphi \in (\mathfrak{S})$$

連續。同样可知，共軛 Fourier 变换

$$\overline{\mathscr{F}}\varphi(y) = \mathscr{F}\varphi(-y) = \int \varphi(x)\exp(2\sqrt{-1}\,\pi\cdot xy)dx$$

也給出由(𝔖)到(𝔖)的連續的綫性映象 $\varphi \Rightarrow \overline{\mathscr{F}}\varphi$.

例 28.1 对于 $x \in R^1$ 上的急減函数

$$\alpha(x) = \exp(-\pi x^2)$$

所满足的微分方程 $\alpha'+2\pi x\alpha=0$，利用(28.8)与(28.9)作变换，就得到关于 $\mathscr{F}\alpha$ 的同样形式的方程，而且初值条件也不变：

$$\mathscr{F}\alpha(0)=\int\exp(-\pi x^2)dx=1.$$

因此，$\mathscr{F}\alpha(y)=\alpha(y)$．由此可見，$x\in R^n$ 的急减函数

$$\exp(-\pi|x|^2)=\alpha(x_1)\cdot\alpha(x_2)\cdots\alpha(x_n)$$

的 Fourier 变换，对各坐标反复积分，也能得到

$$\mathscr{F}_x[\exp(-\pi|x|^2)](y)=\exp(-\pi|y|^2).$$

$\overline{\mathscr{F}}_x[\exp(-\pi|x|^2)]$ 也是同样。

以此例作基础，能够簡单地証明 $\mathscr{F}$ 与 $\overline{\mathscr{F}}$ 为互逆，就是

$$\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}\varphi=\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\varphi=\varphi\quad[\varphi\in(\mathfrak{S})].$$

首先，因为关于 $\overline{\mathscr{F}}$ 也成立着与(28.3)相同的公式，所以

$$\int\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}\varphi(z)\cdot\psi(z)dz=\int\varphi(x)\cdot\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\psi(x)dx.$$

在这里把 $h>0$ 与 $a\in R^n$ 作为参数，如置

$$\psi_h(x)=h^n\exp(-\pi h^2|x-a|^2),$$

由上例容易得到 $\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\psi_h=\psi_h$，于是

$$\int\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\varphi(z)\cdot\psi_h(z)dz=\int\varphi(x)\cdot\psi_h(x)dx. \qquad (28.10)$$

然而既有 $\int\psi_h(x)dx=1$，而且当 $h\to\infty$ 时对任意的 $\varepsilon>0$ 有

$$\int_{|x-a|>\varepsilon}|\psi_h(x)|dx\to 0.$$

所以，在上列积分等式(28.10)的两端取 $h\to\infty$ 时的极限，即得 $\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\varphi(a)=\varphi(a)$．$\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}\varphi=\varphi$ 亦同。

§29 緩增广义函数的 Fourier 变换

如前节所述，$(\mathfrak{D})\prec(\mathfrak{S})\prec(\mathfrak{E})$，实則 $(\mathfrak{D})$ 是稠密地含于 $(\mathfrak{S})$．这是因为，取这样的 $\alpha\in(\mathfrak{D})$，在原点的邻域能使 $\alpha(x)=1$，这样，对于任意的 $\varphi\in(S)$，

$$\varphi_\varepsilon(x)=\alpha(\varepsilon x)\varphi(x) \quad [\varepsilon>0]$$

就属于$(\mathfrak{D})_x$，且当 $\varepsilon\to 0$ 时 $\varphi_\varepsilon\to\varphi$ in (S)。

因此，依照§10, §12, 共轭空間可視为 $(\mathfrak{S})'\prec(\mathfrak{D})'$. 同样，$(\mathfrak{E})'\prec(\mathfrak{S})'$. 广义函数 T '属于' $(\mathfrak{S})'$ 时，也就是説，作为綫性泛函連續地延伸到$(\mathfrak{S})$上时，把它的 Fourier 变换 $\mathscr{F}T$ 定义为

$$\mathscr{F}T(\psi)=T(\mathscr{F}\psi).$$

这个定义是把連續的綫性映象 $(\mathfrak{S})\ni\psi\Rightarrow\mathscr{F}\psi\in(\mathfrak{S})$ 的共轭映象曾設为

$$(\mathfrak{S})'\ni T\Rightarrow\mathscr{F}T\in(\mathfrak{S})',$$

这也是綫性且連續的。同样把 $\overline{\mathscr{F}}T$ 定义为

$$\overline{\mathscr{F}}T(\psi)=T(\overline{\mathscr{F}}\psi).$$

其性质略同于 $\mathscr{F}T$，而 $\overline{\mathscr{F}}T$ 却是 $\mathscr{F}T$ 的反轉。

这个定义是对可积函数 f 及具有有界支集的广义函数 $S\in(\mathfrak{E})'$ 的 $\mathscr{F}f$, $\mathscr{F}S$ 的扩充。进而考虑，$x\in R^n$ 的連續函数 $f(x)$ 被$(1+|x|^2)$的某乘幂所控制，如

$$|f(x)|\leqslant a(1+|x|^2)^m \quad [a=\text{const}]$$

的情形，也就是以某多項式所控制的情形。这时称 f 为**緩增連續函数**。这又能看做是依据

$$f(\varphi)=\int f(x)\varphi(x)dx$$

的 $f\in(\mathfrak{S})'$. 实际上，

$$\int|f(x)\varphi(x)|dx\leqslant a\int(1+|x|^2)^m|\varphi(x)|dx$$

的右端如前节所述乃是有限的，而且 $\varphi\to 0$ in (S) 时右端 $\to 0$. 从而有限的积分 $f(\varphi)$ 确定了，对应 $\varphi\Rightarrow f(\varphi)$ 则是綫性且連續的。更一般的有

定理 29.1 緩增連續函数 f 的任意阶的微系数 $D^p f$ [微商广义函数] '属于' $(\mathfrak{S})'$: 是与 $\varphi\in(\mathfrak{D})$ 的情形相同，

$$D^p f(\varphi) = (-1)^{|p|} \int f(x) D^p \varphi(x) dx \quad [\varphi \in (\mathfrak{S})].$$

反之，任意的 $T \in (\mathfrak{S})'$ 能表达为緩增連續函数的高阶微系数。

前半的証明与 $f \in (\mathfrak{S})'$ 同。玆証后半。T 被有限个基本拟范数 $\rho_{m,p}$ 所控制。取 m 的最大值幷設阶数 $\|p\|$ 的最大值为 k，于是就能写成

$$|T(\varphi)| \leqslant a \cdot \max_{\|p\| \leqslant k} \|(1+|x|^2)^m D^p \varphi\|_\infty.$$

这对 $\varphi \in (\mathfrak{S})$ 成立，因之 $T \in (\mathfrak{D}^k)'$，如轉向极限，上列不等式可适用于任意的 $\varphi \in (\mathfrak{D})^k$。如在定理 21.2 以后部分所見，对 $D = \frac{\partial^{k+2}}{\partial x^{k+2}}$ 存在参函数 $E \in (\mathfrak{E}^k)'$，而且 T 能分解成

$$T = DE * T + \alpha * T, \quad \alpha \in (\mathfrak{D})$$

的形状。x 的函数

$$E * T = T(\tau_x \check{E})$$

依据上列不等式则成緩增連續函数。又因 $\alpha * T(x)$ 也是如此，按每个坐标，从原点积分 $k+2$ 回的函数

$$g(x) = \int \cdots \int \alpha * T(x) dx_1^{k+2} \cdots dx_n^{k+2}$$

也是緩增連續函数。从而

$$f = E * T + g$$

也是緩增連續函数，而且

$$Df = T.$$

依据这个定理，属于 $(\mathfrak{S})'$ 的广义函数称为**緩增广义函数**。

注意 29.1　連續函数作为广义函数虽是緩增的，但作为連續函数则不限于是緩增的。又如属于 L^p 的函数与多項式的乘积也是緩增广义函数。

以緩增 n 重数列

$$a_l \qquad [l = (l_1, \cdots, l_n);\ l_i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots]$$

为系数所作的离散测度

$$T=\sum_l a_l\delta_l=\sum_l a_l\delta(x-l)$$

显見是緩增广义函数，其共轭 Fourier 变换 $S=\overline{\mathscr{F}}T$ 則是在各坐标軸方向具有周期1的‘周期广义函数’：参看本章的前部。把这 S 看做环面上的广义函数时的 Fourier 系数 $c_l(S)$ 是 a_l。

作为緩增函数的变换 $\mathscr{F}$ 与 $\overline{\mathscr{F}}$ 也是互逆的。实際上，

$$\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}T(\varphi)=\overline{\mathscr{F}}T(\mathscr{F}\varphi)=T(\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\varphi)=T(\varphi),$$

于是 $\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}T=T$。同样有 $\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}T=T$。須要注意，在这里是从 $\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\varphi=\varphi$ 导出 $\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}T=T$ 的。

因此关系，从(28.4)的 $\mathscr{F}[f*g]=\mathscr{F}f\cdot\mathscr{F}g$ 可得

$$f*g=\overline{\mathscr{F}}[\mathscr{F}f\cdot\mathscr{F}g]. \tag{29.1}$$

調换 $\mathscr{F}$ 与 $\overline{\mathscr{F}}$ 的 $f*g=\mathscr{F}[\overline{\mathscr{F}}f\cdot\overline{\mathscr{F}}g]$ 也成立。若于后者的 f, g 各代入 $\mathscr{F}f$, $\mathscr{F}g$，則得

$$\mathscr{F}f*\mathscr{F}g=\mathscr{F}[f\cdot g].$$

急减函数之間的乘积仍是急减函数，所以根据(29.1)可知急减函数之間的卷积也是急减的。这个事实也能直接地証明；利用簡单的积分等式[把卷积写成积分]

$$x_i\cdot\varphi*\psi=(x_i\varphi)*\psi+\varphi*(x_i\psi)$$

卽可，这个直接証明虽然容易，但比上面的間接証明冗长。Fourier 变换在这种情况下对于討論的簡化也起了作用。

显見，作为到$(\mathfrak{S})$的映象的共轭映象就得到連續的綫性映象

$$(\mathfrak{S})'\ni T\Rightarrow\partial T/\partial x_i\in(\mathfrak{S})',$$

$$(\mathfrak{S})'\ni T\Rightarrow x_iT\in(\mathfrak{S})',$$

但与从 $\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\varphi=\varphi$ 导出 $\mathscr{F}\overline{\mathscr{F}}T=T$ 同样，从前节 $\mathscr{F}_x[x_i\varphi(x)]$ 的公式(28.7)可导出

$$\mathscr{F}_x[\partial T(x)/\partial x_i](y)=2\sqrt{-1}\,\pi y_i\mathscr{F}T(y),$$

相反地，由 $\mathscr{F}_x[\partial\varphi/\partial x_i]$ 的公式可导出

$$\mathscr{F}_x[-2\sqrt{-1}\,\pi x_iT(x)](y)=\partial\mathscr{F}T(y)/\partial y_i.$$

特别，从前节的 $\mathscr{F}\delta=1$ 得出 $\overline{\mathscr{F}}\delta=1$，因逆变换又得

$$\mathscr{F}1=\delta,$$

$$\mathscr{F}_x[-2\sqrt{-1}\,\pi x_i](y)=\partial\delta/\partial y_i.$$

注意29.2 如把一般的 $\mathscr{F}T$ 也表为形式上的积分的話，$\mathscr{F}1=\delta$ 就成为

$$\int\exp(-2\sqrt{-1}\,\pi\cdot xy)\,dx=\delta(y).$$

这也是为人所知的奇特公式之一。

作为一个应用，試求微分算子

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2-\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2-\cdots-\left(\frac{\partial}{\partial x_{n-1}}\right)^2$$

的基本解 E，这就是 $\nabla E=\delta$ 的解。E 若是緩增的，就应有

$$4\pi^2(y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2-y_n^2)\mathscr{F}E(y)=1.$$

因为多項式

$$Q(y)=4\pi^2(y_1^2+\cdots+y_{n-1}^2-y_n^2)$$

具有零点[所謂光錐点]，所以不得直接假定为 $\mathscr{F}E(y)=Q(y)^{-1}$。一个方法是，把复数值 λ 作为参数来考慮 $Q(y)^\lambda$，由此作出伪函数 $\mathrm{Pf}Q(y)^\lambda$[§20] 即可。比較簡単的一个方法是，直接地求定对于 $\varphi\in(\mathscr{F})$ 的 $E(\varphi)$。所求的

$$E(\varphi)=\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}E(\varphi)=\mathscr{F}E(\overline{\mathscr{F}}\varphi)$$

概括地說就是 $\int\overline{\mathscr{F}}\varphi(y)/Q(y)\cdot dy$，为了避开分母 $Q(y)$ 的零点，置

$$\eta=(0,\cdots,0,\eta_n),\quad \eta_n\neq0,$$

并設

$$E(\varphi)=\int\frac{\overline{\mathscr{F}}\varphi(y+\sqrt{-1}\,\eta)}{Q(y+\sqrt{-1}\,\eta)}dy.$$

分子的意义是

$$\overline{\mathscr{F}}\varphi(y+\sqrt{-1}\,\eta)$$
$$=\int\varphi(x)\exp(2\sqrt{-1}\,\pi\cdot xy)\cdot\exp(-2\pi\cdot x\eta)\,dx,$$

$\varphi\in(\mathfrak{D})$的支集既然有界，那么不問因子 $\exp(-2\pi\cdot x\eta)$ 存在与否积分总存在。由 φ 的支集的有界性可知，$\mathscr{F}\varphi\,(y+\sqrt{-1}\,\eta)$ 是 y 的急减函数。从而上列的积分 $E(\varphi)$ 得以确定。这个 E 就是基本解的事实由 Cauchy 积分定理很容易明了。

如在此所見，$\varphi\in(\mathfrak{D})$ 的 Fourier 变换能扩充到复变数的整函数。鉴于这种情况，L. Ehrenpeis 导入完全任意的广义函数 S 的 Fourier 变换，对于常系数的微分方程起了作用。这时 $\mathscr{F}S$ 不必成为 Schwartz 的广义函数。那是作用于‘急减的指数型整函数’的綫性泛函。所謂指数型整函数，其意义就是 n 个复变数的函数

$$F(z)=F(z_1,\cdots,z_n)$$

而被 $\exp(|z_1|+\cdots+|z_n|)$ 的某次乘方所控制。所謂急减的意义就是，当把 $z_1,\cdots,z_n$ 都限于实变数时就成为急减的。根据这个性质，$\varphi\in(\mathfrak{D})$ 的 Fourier 变换 $F=\mathscr{F}\varphi$ 的特征就完全明确了。

后　　記

已經超过了交稿的期限，无暇触及应用广义函数的实例。特别是关于偏微分方程，把边界条件并入方程的問題，把基本解或参函数的概念一般化了的利用法等等都应詳加說明。对于常系数的微分算子 D 的基本解 E 的性质虽然尽于

$$D\int E(x-y)\varphi(y)dy=\varphi(x),$$

然而关于一般的微分算子 D 也应考虑适合

$$D\int K(x, y)\varphi(y)dy=\varphi(x)$$

的核广义函数 K。

本书所提示的方法，总起来說，先考虑适当函数——**示范函数或判定函数**——所作出的局部凸空間 (A)，然后研究其共轭空間 $(A)'$. 实际需要的是在 $(A)'$ 中的运算，那么就要选擇 (A)，使得作为在 (A) 的适当的綫性映象的共軛而能得出。从而这种方法的有效范圍是局限于綫性运算的問題。

佐藤幹夫最近提出了一种完全不同的新想法，这样，在許多重要的場合，就可不必通过共軛的弯路。还将要开辟比 Schwartz 式的广义函数理論遙为寬广的視野。本书所以未曾介紹 Ehrenpreis 的 Fourier 变换，还不仅是由于不获时日余裕的关系。佐藤的想法是由能把实数軸上圓滑的函数看作上半复数平面的正則函数境界值这一事实出发。这种想法本身虽然不是沒有前例的，但佐藤附加了局部化的原理，从而使 C^∞ 流形上的 Schwartz 广义函数的理論完全被吸收到这个新的想法之中了。

校 后 記

关 肇 直

自从本世紀三十年代索伯列夫(С. Л. Соболев)等的奠基性工作出現之后，三十年来，广义函数理論已經形成为数学中的一个重要分支。它已成为表达自然現象以及解决一些数学問題的一种很好的工具。

适应着二十世紀以来自然科学与工程技术对数学的要求，一方面，我們必須冲破定义在空間各点处的函数这样的概念，另一方面，又必須冲破古典分析对于一些基本运算(如求微商，求非正常积分)使用范圍所加的限制，于是就产生了函数概念的推广——广义函数理論。

广义函数的第一部系統的叙述乃是 L. Schwartz 的广义函数理論[1]。Schwartz 把广义函数看作是定义在某基本函数空間上的綫性泛函。这种讲述方法直到如今仍不失为采用最多的。只要对現代泛函分析有最初步的訓练，就可以領会，并且通过这种看法，也可以对于广义函数的一些属性領会得更透彻。我国早在1955年，在广义函数論方面，就有馮康的綜合論文[1]出版。这篇論文乃是在 Schwartz 的书以及 И. М. Гельфанд 学派对于广义函数理論作出了进一步发展的基础上写的，但它并不单純是1955年以前关于广义函数已有結果的綜合；在材料的組織，推演等方面都表現了作者自己的見解。在这一綜合論文出版的前后，一些介紹广义函数的外文书籍被譯成汉語出版了(見 Halperin[1]，Mikusinski and Sikorski[1])。苏联正在陆續出版的一部計划为五册的巨著，Гельфанд–Шилов 的广义函数論[1]也有人在翻譯中。

岩村联的这部书基本上是按照 Schwartz 的方式叙述的，包括了广义函数理論的基本知識。它以很少的篇幅引导讀者获得这一学科的概貌，对于我国数学工作者是很有益的。由于这一套岩波"現代应用数学"讲座写得都很簡练，本书也不例外，往往推証有时簡略，可能使初学者感到困难。但只要讀者参考上面所提的几部书，一般也并不难讀懂。有些地方沒有加証明的，我們注上参考文献，可以帮助讀者找到証明。

为了帮助讀者在讀完本书后进一步了解广义函数論，特别是了解近几年来的发展，我們在这里很粗略地举出广义函数論在近几年来的一些研究成果。由于我們知識有限，这里的介紹是很不完全的，而且提与不提的选擇也很可能是不够恰当的，希望讀者指正。由于广义函数已經日益成为数学分析中的基本概念之一，从而它会出現在許多数学分支中。这里將不涉及广义函数在数学中許多其它分支方面的大量应用，特別是在偏微分方程論、群表現論与随机过程理論等方面的应用。这里主要只限于举出馮康的綜合論文中已經引用和列举过的以外的文献。

在广义函数的定义与推广方面，出現了不少的作品，特别是有些力图避免使用泛函分析基础知識的初等讲法。前面已經提到 Mikusinski-Sikorski 的书[1]的汉譯本；这本书是从函数基本列的弱收斂出发的。从这种想法出发，Мышкис-Лепин 推广了广义函数的概念[1]，由此可以把 Mikusinski-Sikorski 的定义与 Schwartz 的定义作更清楚的比較。从应用的角度出发，采用較易懂的叙述方式，可看 Temple[1][2] 与 Korevaar 的一系列的工作[1]。König 从幂級数的形式展开出发定义广义函数[1]，在这种讲法的基础上，广义函数被用到偏微分方程的初始値問題、气体动力学(Sauer[1][2])、量子場論(Penzlin[1])等方面去。Köthe[2] 与 Tillman[1] 等把广义函数看作解析函数的边界值，而佐藤[1][2]从类似的

想法出发,建立了"超函数"的理論,并証明它包括了广义函数作为超函数的特例。从公理化的方式的定义由 Sebastião e Silva[1] 与 König[5]給出。Słowikowski 作了很一般的处理,得到了推广[1]。Roumieu[1] 从某些具紧支集的非拟解析函数类出发,定义了拓扑結构,作对偶空間,定义了推广的广义函数,也考虑了一些可以看作是半平面上的全純函数的极限值的推广的广义函数。

与广义函数密切相关的还有 Mikusinski 的算子演算[2][3];这是从完全另外的角度(由連續函数所組成的无零因子交换环——即整域——作域扩張)而建立的。算子演算与广义函数的关系經过近年来許多人的工作已經研究清楚了(Mikusinski[4], Fenyö[1], Wloka[1])。

由 B. Szökefalvi-Nagy 得知匈牙利数学家 Fenyö 最近写了一本关于广义函数的书,其中第一部分把广义函数的各种定义作了比較,但这本书目前我們还未見到。

适应着理論物理及其它各方面的要求,矢値广义函数的理論也建立起来了。除了一些初步的工作之外,L. Schwartz 有长篇的系統研究[4]。这种理論近年来由 Mikusinski[5], Sebastião e Silva[2]用更簡易的方式叙述出来,大大便利了它的应用。

广义函数一般說来并不是对"主变量的每个値"取一定的"値"的。波兰学者們对于广义函数的値的概念作了系統的研究(Łojasiewicz[1][2], Zieleźny[1])。

广义函数一般不能相乘,这是早已知道的事实(Schwartz[3]),并且也是在应用中的一个不便之处。关于广义函数的乘法的研究有許多工作(König[2][3][4], Ishihara[1])。特别值得注意的是 Боголюбов 与 Парасюк 联系着量子場論消除发散困难对某些特殊的奇异函数的相乘所作的重要工作(Боголюбов[2][3], Парасюк[1])。广义函数的除法問題也是在許多方面有用的,涉及在微分方程方

面的应用等等(見 Ehrenpreis[1][2][3], Łojasiewicz[3])。Taylor[2] 等人把这問題与量子場論中的色散关系❶联系起来，把所謂严格因果性化成广义函数的除法問題。

关于广义函数的演算以及积分变换方面的工作也都是与应用有关的(O'Keeffe[1][2], Schwartz[3], Methée[1], 馮康[2], Lavoine[1][2] 等)。在量子場論中，由于考虑到理論必須取得相对論不变的形式，要求考虑在罗倫慈群下不变的广义函数等等(Methée[1], Gårding and Lions[1], 等等)。

前面已經在好几个地方涉及广义函数在現代物理中的应用。Gårding 与 Lions 的讲演[1]正說明了这方面需用广义函数到什么程度。Боголюбов 学派把广义函数系統地应用到量子場論方面来，这也构成他的那本专书[4]的特点。对于在量子場論的目前数学表达形式上避免发散困难等已經表現出广义函数与过去的数学分析比較的优越性，而且結合着它与現代泛函分析的发展很可能得出描述基本粒子的合适数学工具(参看下面附的許多文献)。目前在量子場論中，很多研究集中在色散关系上，而 Боголюбов 学派把色散关系的数学証明化成广义函数的解析延拓問題，第一次成功地給出数学上严謹的推导(Боголюбов[1][5][6], Парасюк[2], Владимиров[1])。

目前在我国，泛函分析的初步知識已在很多高等学校数学专业列入必修課程。希望泛函分析的这一組成部分——广义函数理論也在我国数学界更快地普及起来，使它成为我們探討許多方面的数学問題的有力工具。

❶ 見本丛书胡永振一郎等《量子力学中的数学方法》一书。

文　献

冯　康:

[1] 广义函数論,数学进展,1:3(1955),405～590.

[2] 广义 Mellin 变换(I),数学学报,7:2(1957),242～267.

[3] 广义函数的泛函对偶关系,数学进展,3:2(1957),301～209.

Akanuma Makoto:

[1] Division problems of some species of distributions, Proc. Jap. Acad., 34(1958), 247～250.

Боголюбов, Н. Н.:

[1] (и В. В. Медведев и М. К. Поливанов) Вопросы теории дисперсионных соотношений, 1958.

[2] (и О. Т. Парасюк) О вычитательном формализм при умножений причинных функций, ИАН сер. матем. 20(1956), 585～610.

[3] (и О. Т. Парасюк) Über die Multiplikation der Kausalfunktionen in der Quantentheorie der Felder, Acta Math., 97(1957), 227～266.

[4] (и Д. В. Ширков) Введение в теорию квантованных полей, 1957.

[5] (и В. С. Владимиров) Об аналитическом продолжении обобщенных функций, ИАН сер. матем. 22(1958), 15～48.

[6] (и В. С. Владимиров) Одна теорема об аналитическам продолжении обобщенных функций, Науч. Док. Высш. Шк. физ. мат. науки, 1958(3), 26～35.

Владимиров, В. С. и А. А. Логунов.:

[1] Об аналитических свойствах обобщенных функций квантовой теорий поля, ИАН сер. матем. 23(1959), 661～667.

Bouix, M.:

[1] Applications des distributions aux équations de Maxwell et de Helmholtz, C. R. Paris, 246(1958), 2858～2860.

[2] Extension à certaines distributions de quelques formules d'analyse vectorielle, J. Math. P. Appl., 39(1960), 63～84.

Burkill, J. ch.:

[1] An integral for distributions, Proc. Intern. Congr. Math., 1954, 2, p.90.

Caplaniello, E. R., A. Campolattero and B. Prezioni.:

[1] Regularization and renormalization, I, Nuovo Cimento, 13(1959), 637; II, 同上, 14(1959), 188; III, 同上, 18(1960), 505～524.

Deprit, A.:

[1] Temperate distributions associated with the Klein-Gordon equation, Nuovo Cimento, 2(1954), 335～350.

Ehrenpreis, L.:

[1] Solution of some problems of division, I. Amer. J. Math., 76(1954), 883～903.

[2] Solution of some problems of division, II. Division by a punctual distribution, Amer. J. Math., 77(1955), 286～292.

[3] Solution of some problems of division, III. Division in the spaces, $\mathscr{D}'$, $\mathscr{H}$, $\mathscr{Q}_A$, $\mathscr{O}$, Amer. J. Math., 78(1956), 685～715.

[4] Analytic functions and the Fourier transforms of distributions, I. Ann. Math., 63(1956), 129～159.

[5] Analytic functions and the Fourier transforms of distributions, II. Trans. Amer. Math. Soc., 89(1958), 450～483.

Fenyö, S.:

[1] Über den Zusammenhang zwischen den Mikusinskischen Operatoren und den Distributionen, Math. Nachr., 19(1958), 161～164.

Gál, I. S.:

[1] The inversion of linear operators acting on distributions, I, II, Proc. Koningl. Nederl. Akad. Wet., A 62(1959), 79～94, 95～109.

[2] On the foundations of the theory of distributions, Proc. Nat. Ac. Sc. USA, 44(1958), 1248～1252.

Gårding, L. and J. L. Lions:

[1] Functional analysis, Suppl. vol 14 del Nuovo Cimento (1959), 9～66.

Гельфанд, И. М. и Г. Е. Шилов:

[1] Обобщенные функции и действия над ними, 1958.

[2] Пространства основных и обобщенных функций, 1958.

[3] Некоторые Вопросы теории дифференциальных уравнений, 1958.

Gonzalez Dominguez, A.:

[1] On some divergent integrals of quantum electrodynamics, Segundo Symp. sobre algunos problemas matematica quese estaban estudianto en Latino America, Julia, 1954, 53～60.

Gotô, Ken-iti.:

[1] On a regular formulation of quantum field theory, Progr. Th. Phys., 15(1956), 167～177.

Güttinger, W.:

[1] Konvergente Reihenentwicklungen und singuläre potentiale in der quanten field theorie I, Z. f. Natur for schung, 10 a (1955), 257～266.

[2] Products of improper operators and the renormalization problem of quantum field theory, Prog. Th. Phys., 13(1955), 612～626.

Halperin, I.:

[1] Introduction to the theory of distributions. (有汉譯本)

Ishihara, Tadashige.:

[1] Note on an extension of multiplication of distributions, Proc. Jap. Acad., 31(1955), 141～146.

König, H.:

[1] Neue Begründung der Theorie der "Distribution" von L. Schwartz, Math. Nachr., 9(1953), 129～148.

[2] Multiplikation von Distribution I, Math. Ann. 128(1955), 420～452.

[3] Multiplikation und Variablentransformation in der Theorie der Distributionen, Arch. Math., 6(1955), 391～396.

[4] Multiplikations theorie der verallgemeinerten Distributionen, Abh. Bayer. Akad. Wiss. Math.-Naturwiss. Kl., 1957, No. 82.

[5] Die Theorie der Distributionen, Math. Phys. Semesterberichte, 7:1 (1960), 26～56.

Korevaar, J.:

[1] Distributions defined from the point of view of applied math. I～V, Proc. Koningl. Nederl. Ak. Wet. A 58(1955), 368～378, 379～389, 483～493, 494～503, 663～674.

Köthe, G.:

[1] Dualität in der Funktionentheorie, J. r. angew. Math., 191(1953), 30～49.

[2] Die Randverteilungen analytischer Funktionen, Math. Z., 57(1953), 13～33.

Lavoine, J.:

[1] Sur les transformées de certaines distributions, C. R. Paris, 242 (1956), 717～719.

[2] Calcul symbolique, distributions et pseudofonctions, Paris, CNRS, 1959.

Łojasiewicz, S.:

[1] Sur la valeur et la limite d'une distribution dans un point, Studia Math., 16(1957), 1~36.

[2] Sur la fixation des variables dans une distribution, Studia Math., 17(1958), 1~64.

[3] Sur le probleme de la division, Studia math., 18(1959), 87~136.

Méthée, P. D.

[1] Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de lorentz, Comm. Math. Helv., 28(1954), 228~269; 32(1957), 153.

Mikusinski, J.:

[1] (and R. Sikorski) The elementary theory of distributions (I), Rozprawy Mat. 12, 1957(有汉譯本).

[2] Sur les fordements du calcul opératoire, Studia Math., 11(1950), 41~70(汉譯見数学进展).

[3] Operational calculus, 1959(俄譯本).

[4] Sur les notions de distribution et d'opérateur, Bull. Acad. Polon. Sc., 12(1958), 737~741.

[5] Distributions à valeurs dans les réunions d'espaces de Banach, Studia Math., 19(1960), 251~285.

Мышкис, А. Д. и Лепин, А. Я.:

[1] Об определении обобщенных функций, Мат. Сб., 43(1957), 323~348.

O'Keeffe, J.:

[1] Distribution theory of the operational calculus, Rend. Circ. Mat. Palermo, 6(1957), 157~170.

[2] Singularities of Hadamard's finite part of improper integrals in the distributions of Schwartz, Rend. Circ. Mat. Palermo, 6(1957), 65~82.

Парасюк, О. С.:

[1] Умножение причиных функций при несовпадающих аргументах, ИАН сер. матем. 20(1956), 843~852.

[2] Одна теорема об аналитическом продолжении обобщенных функций, Укр. Мат. Ж., 11(1959), 328~330.

Penzlin, Fr.:

[1] Distributions theoretische Behandlung von Anfangswertproblemen relativistischer Wellengleichungen, Wissensch. Zeitschr. Fr. Schiller Univ. Jena, 5(1955~6), 137~149.

Roumieu, Ch.:

[1] Sur quelques extensions de la notion de distributions, Ann. Sc. éc. norm. sup., 77(1960), 41~121.

Sauer, R.:

[1] Anfangswertprobleme, 2. Aufl.

[2] Einführung in den kalkül der Distributionen theorie mit Anwendungen aufs Anfangswertprobleme in der Gasdynamik, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg, 22(1958), 50~70.

佐藤幹夫(Sato Mikio):

[1] Theory of hyperfunctions 1, J. Fac. Sc. Univ. Tokyo, 8(1959), Sect. 1, 133~193.

[2] 超函数の理論,数学, 10(1959), 1~27.

Schwartz, L.:

[1] Théorie des distributions I~II, 1950~1951.

[2] Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions, C. R. Paris, 239(1954).

[3] Transformations de Laplace des distributions, Medd. Lunds Univ. Mat. Sem. Supplementband, 1952, 196~206.

[4] Ann. Inst. Fourier, 1957, 1958.

Schmidt, W. and K. Baumann:

[1] Quantentheorie des Felder als Distributonentheorie Nuovo Cimento, 4(1956), 860~886.

Sebastião e Silva, J.:

[1] Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions Rev. Fac. Cl. Lisboa A 4(1954~5), 79~186.

[2] Sur la définition et la structure des distributions vectorielles Port. Mat., 19(1960), 1~80.

Serpe, J.:

[1] Remarques sur l'application de la théorie des distributions à la théorie quantique des champs, Physica, 20(1954), 736~742.

Słowikowski, W.:

[1] A theory of extensions of map systems, Fund. Math., 46(1959),

243~275.

Taylor, J. G.:

[1] Classical electrodynamics as a distribution theory, Proc. Camb. Phil. Soc., 52(1956), 119~134.

[2] Dispersion relations and Schwartz's distribution, Ann, Phys., 5 (1958), 391~398.

Temple, G.:

[1] Theories and applications of generalized functions, J. Lond. Math. Soc., 28(1953), 134~148.

[2] The theory of generalized functions, Proc. Roy. Soc., A 228(1955), 175~190.

Tillmann, H. G.:

[1] Randverteilungen analytischer Funktionen und Distributionen, Math. Z., 59(1953), 61~83.

Tungstrand, A.:

[1] Distributions invariant under an orthogonal group of arbitrary signature, Math. Scand., 8(1960), 201~208.

Vasilache, S.:

[1] Calcul operationnel algébrique des distributions à support dans R_+^n, $n\geqslant 1$, Rev. Math. P. Appli., 4(1959), 185~219.

Weston:

[1] Operational calculus and generalized functions, Proc. Roy. Soc., A 250(1959).

Wloka, J.:

[1] Distributionen und Operatoren, Math. Ann., 140(1960), 227~244.

吉田耕作(Yosida, K.):

[1] 超函数論,現代数学讲座(共立社),1956.

Zieleźny, Z.:

[1] Über die Mengen der regulären und singulären Punkte einer Distributionen, Studia Math., 19:1(1960), 27~52.